

ACTA  
ACADEMIAE PAEDAGOGICAE AGRIENSIS  
NOVA SERIES TOM. XXVII.

AZ ESZTERHÁZY KÁROLY TANÁRKÉPZŐ FŐISKOLA  
TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEI

REDIGIT—SZERKESZTI  
ORBÁN SÁNDOR, V. RAISZ RÓZSA

SECTIO MATHEMATICAE

TANULMÁNYOK  
A MATEMATIKAI TUDOMÁNYOK  
KÖRÉBŐL

REDIGIT—SZERKESZTI  
KISS PÉTER, MÁTYÁS FERENC

EGER, 2000



## RESULTS CONCERNING PRODUCTS AND SUMS OF THE TERMS OF LINEAR RECURRENCES

Péter Kiss (Eger, Hungary)

**Abstract.** Many papers have investigated perfect powers and polynomial values as terms of linear recursive sequences of rational integers. Many results show, under some restrictions, that if a term of a sequence is a perfect power or a polynomial value, then the exponent of the powers and the degree of the polynomials are bounded above. In this paper we show and prove some similar results where the terms are substituted by products and sums of the terms of sequences.

**AMS Classification Number:** 11B37

### 1. Introduction

For a given positive integer  $t \geq 1$  we define linear recursive sequences  $G^{(i)} = \{G_n^{(i)}\}_{n=0}^{\infty}$  of order  $t_i \geq 2$  ( $i = 1, 2, \dots, t$ ) by the recursion formulae

$$G_n^{(i)} = A_1^{(i)} G_{n-1}^{(i)} + A_2^{(i)} G_{n-2}^{(i)} + \dots + A_{t_i}^{(i)} G_{n-t_i}^{(i)},$$

where  $A_1^{(i)}, \dots, A_{t_i}^{(i)}$  and the initial values  $G_0^{(i)}, \dots, G_{t_i-1}^{(i)}$  are fixed rational integers such that  $A_{t_i}^{(i)} \neq 0$  and the initial terms are not all zero for  $1 \leq i \leq t$ . The polynomial

$$g^{(i)}(x) = x^{t_i} - A_1^{(i)} x^{t_i-1} - \dots - A_{t_i}^{(i)}$$

is called the characteristic polynomial of the sequence  $G^{(i)}$  and we denote its distinct roots by  $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_{k_i}^{(i)}$  and suppose that

$$|\alpha_1^{(i)}| \geq |\alpha_2^{(i)}| \geq \dots \geq |\alpha_{k_i}^{(i)}|.$$

Denote the multiplicity of  $\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{k_i}^{(i)}$  by  $m_1^{(i)}, \dots, m_{k_i}^{(i)}$ , respectively. Then, as it is well-known, the terms of the sequences can be expressed as

$$(1) \quad G_n^{(i)} = P_1^{(i)}(n)(\alpha_1^{(i)})^n + P_2^{(i)}(n)(\alpha_2^{(i)})^n + \dots + P_{k_i}^{(i)}(n)(\alpha_{k_i}^{(i)})^n$$

for any  $n \geq 0$ , where  $P_j^{(i)}$  are polynomials of degree  $m_j^{(i)} - 1$  and the coefficients of  $P_j^{(i)}$  are algebraic numbers from the number field  $\mathbf{Q}(\alpha_1^{(i)}, \dots, \alpha_{k_i}^{(i)})$ . If  $m_1^{(i)} = 1$  and  $|\alpha_1^{(i)}| > |\alpha_j^{(i)}|$  ( $j = 2, \dots, k_i$ ) for some  $i$ , then  $\alpha_1^{(i)}$  will be denote by  $\alpha_i$ . In this case  $|\alpha_i| > 1$ , since  $|A_{t_i}^{(i)}| \geq 1$ , and by (1) we have

$$(2) \quad G_n^{(i)} = a_i \alpha_i^n + P_2^{(i)}(n)(\alpha_2^{(i)})^n + \dots + P_{k_i}^{(i)}(n)(\alpha_{k_i}^{(i)})^n,$$

where  $a_i \in \mathbf{Q}(\alpha_i, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_{k_i}^{(i)})$  and we suppose that  $a_i \neq 0$ . If  $t = 1$  then we omit (i) in (2) and we write  $G_n$  instead of  $G_n^{(1)}$ .

In the following we need some notations. Let  $p_1, \dots, p_r$  be given distinct prime numbers. In the results and theorems  $S$  will denote the set of integers defined by

$$S = \{\pm p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdots p_r^{e_r} : e_i \geq 0, 1 \leq i \leq r\}.$$

Furthermore  $c_0, c_1, \dots, n_0, n_1, \dots$  will denote positive effectively computable constans depending only on  $t$ , the parameters of the sequences, the primes  $p_1, \dots, p_r$  and the constans which are given in some of the mentioned results and theorems ( $\delta, \gamma$  and  $K$ ). We note that the constans can be exactly determined similary as in the papers [4] and [8].

Perfect powers and polynomial values among the terms of linear recurrences have been investigated for many years. For second order linear recurrences many particular results are known concerning perfect squares and higher powers in the sequences (see e.g. Cohn [2], Wylie [17], Mignotte and Pethő [9,11,12]). A general result was obtained by Shorey and Stewart [14] and Pethő [13]: Any non degenerate second order linear recursive sequence contains only finitely many perfect powers.

For general linear recurrences, which satisfy (2), Shorey and Stewart [14] proved that if  $G_x \neq a\alpha^x$  and  $G_x = dw^q$  for positive integers  $w > 1, q > 1$  and a fixed integer  $d \neq 0$ , then  $q < n_0$ . In [3] we improved this result substituting  $d$  by integers  $s \in S$ , furthermore we showed, under some conditions, that  $|sw^q - G_x| > e^{c_0 x}$  for all integers  $s, w$  and  $x$  with  $s \in S$  and  $x, q > n_1$ . Similar results were obtain by Shorey and Stewart [15].

## 2. Results

If we replace  $G_x$  by the sums or products of the terms of linear recurrences  $G^{(i)}$  we can obtain similar results as the above ones. E.g. Brindza, Liptai and Szalay [1] proved, under some conditions, that the equation

$$G_x^{(1)} G_y^{(2)} = w^q$$

can be satisfied only if  $q$  is bounded above. This result was extended by Szalay [16]. Now we present some other more general results. In the results we shall use the above notations and the following ones:

$$G_{x_1}^{(1)} \cdot G_{x_2}^{(2)} \cdots G_{x_t}^{(t)} = \Pi_{x_1, \dots, x_t}$$

and

$$G_{x_1}^{(1)} + G_{x_2}^{(2)} + \cdots + G_{x_t}^{(t)} = \Sigma_{x_1, \dots, x_t},$$

where  $x_1, \dots, x_t$  are positive integers.

**Theorem 1.** (Szalay [16]). *Let  $G^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, t$ ) be linear recursive sequences defined in (2) and let  $0 < \delta < 1$  be a real number. If  $\Pi_{x_1, \dots, x_t} \neq \Pi_{i=1}^t a_i \alpha_i^{x_i}$  and*

$$\Pi_{x_1, \dots, x_t} = sw^q$$

*with  $w > 1$ ,  $s \in S$  and  $x_j > \delta \cdot \max(x_1, \dots, x_t)$  for  $1 \leq j \leq t$ , then  $q < n_2$ .*

**Theorem 2.** (Kiss and Mátyás [4]). *Let  $G^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, t$ ) be linear recursive sequences defined in (2) and let  $0 < \delta < 1$  be a fixed number. Then there is an effectively computable positive number  $c_1$  such that if  $sw^q \neq \Pi_{i=1}^t a_i \alpha_i^{x_i}$ , then*

$$|sw^q - \Pi_{x_1, \dots, x_t}| > e^{c_1 \cdot \max(x_1, \dots, x_t)}$$

*for any positive integer  $s$ ,  $w$ ,  $q$ ,  $x_1, \dots, x_t$  satisfying the conditions  $s \in S$ ,  $w > 1$ ,  $x_i > \delta \cdot \max(x_1, \dots, x_t)$  and  $\min(q, \max(x_1, \dots, x_t)) > n_3$ .*

**Theorem 3.** (Kiss and Mátyás [5]). *Under the conditions of Theorem 2 concerning the sequences  $G^{(i)}$  and integers  $x_1, \dots, x_t$ , we have*

$$|s - \Pi_{x_1, \dots, x_t}| > e^{c_2 \cdot \max(x_1, \dots, x_t)}$$

*for any  $s \in S$  and  $\max(x_1, \dots, x_t) > n_4$ .*

**Theorem 4.** (Kiss and Mátyás [6]). *Let  $G^{(1)}$  and  $G^{(i)}$  ( $i = 2, \dots, t$ ) be linear recurrences defined by (2) and (1), respectively, and let  $K > 1$  be a real number. Suppose that  $|\alpha_1| \geq |\alpha_j^{(i)}|$  for  $i = 2, \dots, t$  and  $j = 1, \dots, k_i$ . If*

$$|\Sigma_{x_1, \dots, x_t}| \neq |a_1 \alpha_1^{x_1}|$$

and

$$\Sigma_{x_1, \dots, x_t} = sw^q$$

*for positive integers  $w > 1$ ,  $q, x_1, \dots, x_t$  and  $s \in S$  such that*

$$x_1 > K \cdot \max(x_2, \dots, x_t),$$

then  $q < n_5$ .

**Theorem 5.** (Mátyás [8]). *Under the conditions of Theorem 4 for the sequences  $G^{(i)}$  and integers  $x_1, \dots, x_t$  we have*

$$|sw^q - \Sigma_{x_1, \dots, x_t}| > e^{c_3 x_1}$$

for any  $s \in S$  and  $\min(x_1, q) > n_6$ .

**Theorem 6.** (Kiss and Mátyás [5]). *Under the conditions of Theorem 4 for the sequences  $G^{(i)}$  and integers  $x_1, \dots, x_t$  we have*

$$|s - \Sigma_{x_1, \dots, x_t}| > e^{c_4 x_1}$$

for any  $s \in S$  and  $x_1 > n_7$ .

**Corollary 1.** *Under the conditions implied by Theorem 2 and Theorem 4, Theorem 3 and Theorem 6 imply that the relations*

$$\Pi_{x_1, \dots, x_t} \in S \quad \text{and} \quad \Sigma_{x_1, \dots, x_t} \in S$$

hold only for finitely many positive integers  $x_1, \dots, x_t$ .

If we replace  $sw^q$  in Theorem 1, 2, 4 and 5 by a polynomial, we can obtain similar results. Nemes and Pethő [10] furthermore Kiss [7] proved, that if  $G$  is a linear recurrence defined by (2) and  $F(y)$  is a polynomial satisfying some conditions, then the equation  $G_x = F(y)$  implies that the degree of  $F(y)$  is bounded above. Now we give some generalizations of this result.

**Theorem 7.** *Let  $G^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, t$ ) be linear recursive sequences defined by (2) and let  $0 < \delta < 1$  be a fixed positive real number. Further let*

$$(3) \quad F(y) = by^q + b_k y^k + b_{k-1} y^{k-1} + \dots + b_0$$

be a polynomial of integer coefficients with  $b \neq 0$  and  $k < \gamma q$ , where  $0 < \gamma < 1$ . If  $\gamma < c_6$  and  $by^q \neq \prod_{i=1}^t a_i \alpha_i^{x_i}$ , then

$$|F(y) - \Pi_{x_1, \dots, x_t}| > e^{c_5 \cdot \max(x_1, \dots, x_t)}$$

for any positive integers  $y, q, x_1, \dots, x_t$  satisfying the conditions  $y > 1$ ,  $x_i > \delta \cdot \max(x_1, \dots, x_t)$ , and  $\min(q, \max(x_1, \dots, x_t)) > n_8$ .

**Theorem 8.** *Let  $G^{(i)}$  ( $i = 1, \dots, t$ ) be linear recurrences and  $x_1, \dots, x_t$  positive integers which satisfy the conditions of Theorem 4. Let  $F(y)$  be a polynomial given in Theorem 7. Then*

$$|F(y) - \Sigma_{x_1, \dots, x_t}| > e^{c_7 x_1}$$

for any positive integers  $y > 1$ ,  $x_1, \dots, x_t$  with  $\min(q, x_1) > n_9$ .

**Corollary 2.** From Theorem 7 and 8 it follows, that if the sequences  $G^{(i)}$ , the integers  $x_1, \dots, x_t$  and the polynomial  $F(y)$  satisfy the conditions of Theorem 7 and Theorem 8, then the equations

$$\Pi_{x_1, \dots, x_t} = F(y)$$

and

$$\Sigma_{x_1, \dots, x_t} = F(y)$$

imply the inequalities  $q < n_{10}$  and  $q < n_{11}$ , respectively.

### 3. Proofs

The proofs of the Theorems 1–6 can be found in the papers mentioned in the theorems. The proofs are based upon Baker-type estimations of linear forms of logarithms of algebraic numbers, using the explicit form of the terms of the sequences.

**Proof of Theorem 7.** Let  $G^{(i)}$  and  $F(y)$  be linear recurrences given in the theorem and let  $y, q, x_1, \dots, x_t$  be positive integers such that  $y, q > 1$ ,  $k < \gamma q$  and  $x_i > \delta \cdot \max(x_1, \dots, x_t)$  for  $i = 1, \dots, t$ . Denote by  $x$  the maximum values of  $x_1, \dots, x_t$ , i.e.

$$x = \max(x_1, \dots, x_t).$$

Suppose that

$$(4) \quad |F(y) - \Pi_{x_1, \dots, x_t}| < e^{cx}$$

for some  $c > 0$ . Then by (2) and (3), using that  $\delta x < x_i \leq x$  and  $k < \gamma q$

$$(5) \quad \left| by^q(1 + \varepsilon_1) - \left( \prod_{i=1}^t a_i \alpha_i^{x_i} \right) (1 + \varepsilon_2) \right| < e^{cx}$$

follows, where

$$|\varepsilon_1| < e^{-csq} \quad \text{and} \quad |\varepsilon_2| < e^{-c_9x}$$

if  $q, x > n_{12}$ . By (5), using that  $x_i > \delta x$ , we obtain the inequalities

$$\left| \frac{by^q}{\prod_{i=1}^t a_i \alpha_i^{x_i}} - \frac{1 + \varepsilon_2}{1 + \varepsilon_1} \right| < \frac{e^x}{\left| \prod_{i=1}^t a_i \alpha_i^{x_i} \right|} \cdot \frac{1}{|1 + \varepsilon_1|} < \frac{e^{cx}}{e^{c_{10}x}} < e^{-c_{11}x}$$

if  $c < c_{10}$ . From these it follows that

$$(6) \quad 1 - \varepsilon < \left| \frac{by^q}{\prod_{i=1}^t a_i \alpha_i^{x_i}} \right| < 1 + \varepsilon,$$

where  $0 \leq \varepsilon < c_{12} \cdot \max(|\varepsilon_1|, |\varepsilon_2|, e^{-c_{11}x})$ . By (6) we get the inequality

$$|by^q| < (1 + \varepsilon) \left| \prod_{i=1}^t a_i \alpha_i^{x_i} \right| < e^{c_{13}x}$$

and so

$$(7) \quad q \cdot \log y < c_{14}x.$$

Using (7), by Theorem 2 we have

$$\begin{aligned} |F(y) - \Pi_{x_1, \dots, x_t}| &\geq |by^q - \Pi_{x_1, \dots, x_t}| - |d_k y^k + \dots + b_0| \geq \\ &|e^{c_{15}x} - y^{c_{16}k}| = |e^{c_{15}x} - e^{c_{16}k \cdot \log y}| > \\ &|e^{c_{15}x} - e^{c_{16}\gamma q \cdot \log y}| > |e^{c_{15}x} - e^{c_{17}\gamma x}| > e^{c_{18}x} \end{aligned}$$

if  $c_{15} > c_{17}\gamma$ , i.e. if  $\gamma < c_{15}/c_{17}$ . It contradicts to (4) if  $c < c_{18}$ , which proves the theorem with  $c_5 = c_{18}$ ,  $c_6 = c_{15}/c_{17}$  and  $n_8 = \max(n_{12}, n_{13})$ , where  $n_{13}$  is implied by Theorem 2.

**Proof of Theorem 8.** The theorem can be proved similary as Theorem 7 using the result of Theorem 5.

## References

- [1] B. BRINDZA, K. LIPTAI AND L. SZALAY, On the products of the terms of linear recurrences, *Number Theory*, Eds: Győry–Pethő–Sós, Walter de Gruyter, Berlin–New York, (1998), 101–106.
- [2] J. H. E. COHN, On square Fibonacci numbers, *J. London Math. Soc.*, **39** (1964), 537–540.
- [3] P. KISS, Differences of the terms of linear recurrences, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **20** (1985), 285–293.
- [4] P. KISS AND F. MÁTYÁS, Products of the terms of linear recurrences, to appear.
- [5] P. KISS AND F. MÁTYÁS, On products and sums of the terms of linear recurrences, to appear.



- [6] P. KISS AND F. MÁTYÁS, Perfect powers from the sums of terms of linear recurrences, *Period. Mat. Hungar.*, to appear.
- [7] P. KISS, Note on a result of I. Nemes and Pethő concerning polynomial values in linear recurrences, *Publ. Math. Debrecen*, to appear.
- [8] F. MÁTYÁS, On the differences of perfect powers and sums of terms of linear recurrences, *Riv. Mat. Univ. Parma*, to appear.
- [9] M. MIGNOTTE AND A. PETHŐ, Sur les carrés dans certaines suites de Lucas, *J. Théorie des Nombres de Bordeaux*, **5** (1993), 333–341.
- [10] I. NEMES AND A. PETHŐ, Polynomials values in linear recurrences, *Publ. Math. Debrecen*, **31** (1984), 229–233.
- [11] A. PETHŐ, Full cubes in the Fibonacci sequence, *Publ. Math. Debrecen*, **30** (1983), 117–127.
- [12] A. PETHŐ, The Pell sequence contains only trivial perfect powers, *Coll. Math. Soc. J. Bolyai*, 60. sets, Budapest, (1991), 561–568.
- [13] A. PETHŐ, Perfect powers in second order linear recurrences, *J. Number Theory*, **15** (1982), 5–13.
- [14] T. N. SHOREY AND C. L. STEWART, On the Diophantine equation  $ax^{2t} + bx^t y + cy^2 = d$  and pure powers in recurrences, *Math. Scand.*, **52** (1983), 24–36.
- [15] T. N. SHOREY AND C. L. STEWART, Pure powers in recurrence sequences and some related Diophantine equations, *J. Number Theory*, **27**, (1987), 324–352.
- [16] L. SZALAY, A note on the products of the terms of linear recurrences, *Acta Acad. Paed. Agriensis, Sect. Math.*, **24** (1997), 47–53.
- [17] O. WYLIE, In the Fibonacci series  $F_1 = 1, F_2 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  the first, second and twelfth terms are squares, *Amer. Math. Monthly*, **71** (1964), 220–222.

**Péter Kiss**

Institute of Mathematics and Informatics

Eszterházy Károly College

Leányka str. 4.

H-3301 Eger, Hungary

e-mail: kissp@ektf.hu



## ON POLYNOMIAL VALUES OF THE SUM AND THE PRODUCT OF THE TERMS OF LINEAR RECURRENCES

Kálmán Liptai (Eger, Hungary)

**Abstract.** Let  $G^{(i)} = \{G_x^{(i)}\}_{x=0}^{\infty}$  ( $i=1,2,\dots,m$ ) linear recursive sequences and let  $F(x)=dx^q + d_px^p + d_{p-1}x^{p-1} + \dots + d_0$ , where  $d$  and  $d_i$ 's are rational integers, be a polynomial. In this paper we showed that for the equations  $\sum_{i=1}^m G_{x_i}^{(i)} = F(x)$  and  $\prod_{i=1}^m G_{x_i}^{(i)} = F(x)$  where  $x_i$ -s are non-negative integers, with some restriction, there are no solutions in  $x_i$ -s and  $x$  if  $q > q_0$ , where  $q_0$  is an effectively computable positive constant.

**AMS Classification Number:** 11B37

### 1. Introduction

Let  $m \geq 2$  be an integer and define the linear recurrences  $G^{(i)} = \{G_x^{(i)}\}_{x=0}^{\infty}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) of order  $k_i$  by the recursion

$$(1) \quad G_x^{(i)} = A_1^{(i)} G_{x-1}^{(i)} + A_2^{(i)} G_{x-2}^{(i)} + \dots + A_{k_i}^{(i)} G_{x-k_i}^{(i)} \quad (x \geq k_i \geq 2),$$

where the initial values  $G_j^{(i)}$  and the coefficients  $A_{j+1}^{(i)}$  ( $j = 0, 1, \dots, k_i - 1$ ) are rational integers. Suppose that

$$A_{k_i}^{(i)} \left( \left| G_0^{(i)} \right| + \left| G_1^{(i)} \right| + \dots + \left| G_{k_i-1}^{(i)} \right| \right) \neq 0$$

for any recurrences and denote the distinct roots of the characteristic polynomial

$$g^{(i)}(u) = u^{k_i} - A_1^{(i)} u^{k_i-1} - \dots - A_{k_i}^{(i)}$$

of the sequence  $G^{(i)}$  by  $\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_{t_i}^{(i)}$  ( $t_i \geq 2$ ). It is known that there exist uniquely determined polynomials  $p_j^{(i)}(u) \in \mathbf{Q}(\alpha_1^{(i)}, \alpha_2^{(i)}, \dots, \alpha_{t_i}^{(i)})[u]$  ( $j = 1, 2, \dots, t_i$ ) of degree less than the multiplicity  $m_j^{(i)}$  of roots  $\alpha_j^{(i)}$  such that for  $x \geq 0$

$$(2) \quad G_x^{(i)} = p_1^{(i)}(x) \left( \alpha_1^{(i)} \right)^x + p_2^{(i)}(x) \left( \alpha_2^{(i)} \right)^x + \dots + p_{t_i}^{(i)}(x) \left( \alpha_{t_i}^{(i)} \right)^x.$$

Using the terminology of F. Mátyás [9], we say that  $G^{(1)}$  is the dominant sequence among the sequences  $G^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ) if  $m_1^{(1)} = 1$ , the polynomial  $p_1^{(1)}(x) = a$  is a non-zero constant and, using the notation  $\alpha_1^{(1)} = \alpha$ ,

$$(3) \quad |\alpha| = \left| \alpha_1^{(1)} \right| > \left| \alpha_2^{(1)} \right| \geq \dots \geq \left| \alpha_{t_1}^{(1)} \right| \quad \text{and} \quad |\alpha| \geq \left| \alpha_j^{(i)} \right|$$

for  $2 \leq i \leq m$  and  $1 \leq j \leq t_i$ . (Since  $A_{k_1}^{(1)} \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ , therefore  $|\alpha| > 1$ .) In this case

$$(4) \quad G_x^{(1)} = a\alpha^x + p_2^{(1)}(x) \left( \alpha_2^{(1)} \right)^x + \dots + p_{t_1}^{(1)}(x) \left( \alpha_{t_1}^{(1)} \right)^x.$$

If  $\left| \alpha_1^{(i)} \right| > \left| \alpha_j^{(i)} \right|$  ( $j = 2, \dots, t_i$ ) in a sequence  $G^{(i)}$  and  $m_1^{(i)} = 1$  then we denote  $p_1^{(i)}(x)$  by  $a_i$ , in the case  $i = 1$  by  $a$ .

In the following we assume that

$$(5) \quad F(x) = dx^q + d_px^p + d_{p-1}x^{p-1} + \dots + d_0,$$

is a polynomial with rational integer coefficients, where  $d \neq 0$ ,  $q \geq 2$  and  $q > p$ .

In the paper we use the following notations:

$$(6) \quad \Sigma_{x_1, x_2, \dots, x_m} = \sum_{i=1}^m G_{x_i}^{(i)}$$

and

$$(7) \quad \mathcal{G}_{x_1, x_2, \dots, x_m} = \prod_{i=1}^m G_{x_i}^{(i)},$$

where  $x_i$ -s are non-negative integers.

The Diophantine equation

$$(8) \quad G_n = F(x)$$

with positive integer variables  $n$  and  $x$  was investigated by several authors. It is known that if  $G$  is a nondegenerate second order linear recurrence, with some restrictions, and  $F(x) = dx^q$  then the equation (8) have finitely many integer solutions in variables  $n \geq 1$  and  $q \geq 2$ .

For general linear recurrences we know a similar result (see [11]). A more general result was proved by I. Nemes and A. Pethő [10], furthermore by P. Kiss [4].

Using some other conditions, B. Brindza, K. Liptai and L. Szalay [2] proved that the equation

$$G_{x_1}^{(1)} G_{x_2}^{(2)} = w^q$$

implies that  $q$  is bounded above, while L. Szalay [12] made the following generalization of this problem. Let  $d \neq 0$  fixed integer and  $s$  a product of powers of given primes. Then, under some conditions, the equation  $dG_{x_1}^{(1)}G_{x_2}^{(2)} \dots G_{x_m}^{(m)} = sw^q$  in positive integers  $w > 1, q, x_1, \dots, x_m$  implies that  $q$  is bounded above by a constant.

The author in [8] showed that for the equation  $G_n^{(1)}G_m^{(2)} = F(x)$ , with some restriction, there are no solutions in  $n, m$  and  $x$  if  $q > q_0$ , where  $q_0$  is an effectively computable positive constant.

With some restrictions, P. Kiss and F. Mátyás [7] proved an additive result in this theme, namely, if  $\Sigma_{x_1, x_2, \dots, x_m} = sw^q$  for positive integers  $w > 1, x_1, x_2, \dots, x_m, q$  and there is a dominant sequence among the sequences  $G^{(i)}$ , then  $q$  is bounded above.

P. Kiss investigated the difference between perfect powers and products or sums of terms of linear recurrences. Such a result is proved in [3] for the sequence  $G^{(1)}$  which has the form of (4). Namely, under some restrictions,  $|sw^q - G_x^{(1)}| > e^{cx}$  for all integers  $w > 1, x, q$  and  $s$ , if  $x$  and  $q > n_1$ , where  $c$  and  $n_1$  are effectively computable positive numbers. Using some conditions, P. Kiss and F. Mátyás [6] generalized this result substituting  $G_x^{(1)}$  by  $\prod_{i=1}^m G_{x_i}^{(i)}$ , where the sequences  $G^{(i)}$  have the form of (4).

F. Mátyás [8] proved a similar result in additive case.

## 2. Results and proofs

Using the notations mentioned above, we shall prove the following theorems.

**Theorem 1.** *Let  $G^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $m \geq 2$ ) be linear recursive sequences of integers defined by (1). Suppose that  $G^{(1)}$  is the dominant recurrence among the sequences  $G^{(i)}$  and  $\alpha \notin \mathbf{Z}$ . Let  $K > 1$  and  $0 < \delta_1 < 1$  be real constants,  $F(x)$  and  $\Sigma_{x_1, x_2, \dots, x_m}$  are defined by (5) and (6) with the condition  $p < \delta_1 q$ . If*

$$x_1 > K \max_{2 \leq i \leq m} (x_i)$$

*then the equation*

$$(9) \quad \Sigma_{x_1, x_2, \dots, x_m} = F(x),$$

*in positive integers  $x \geq 2, x_1 > x_2, \dots, x_m, q$  implies that  $q < q_1$ , where  $q_1$  is an effectively computable number depending on  $K, \delta_1, F(x), m$  and the sequences  $G^{(i)}$ .*

**Theorem 2.** *Let  $G^{(i)}$  ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $m \geq 2$ ) be linear recursive sequences of integers defined by (1). Suppose that  $|\alpha_1^{(i)}| > |\alpha_j^{(i)}|$  for  $1 \leq i \leq m$  and  $2 \leq j \leq t_i$ ,*

moreover  $\alpha_1^{(i)}$ -s are not integers. Let  $0 < \gamma < 1$  and  $0 < \delta_2 < 1$  be real constants,  $F(x)$  and  $\mathcal{G}_{x_1, x_2, \dots, x_m}$  are defined by (5) and (7) with the condition  $p < \delta_2 q$ . If  $x_i > \gamma \max(x_1, \dots, x_m)$  for  $i = 1, \dots, m$  then the equation

$$(10) \quad \mathcal{G}_{x_1, x_2, \dots, x_m} = F(x),$$

in positive integers  $x \geq 2, x_1 > x_2, \dots, x_t, q$  implies that  $q < q_2$ , where  $q_2$  is an effectively computable number depending on  $\gamma, \delta_2, F(x), m$  and the sequences  $G^{(i)}$ .

**Remark.** P. Kiss in [5] proved similar results with other conditions.

In what follows we need the following auxiliary results.

**Lemma 1.** Let  $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$  ( $\omega_i \neq 0$  or 1) be algebraic numbers with heights at most  $M_1, M_2, \dots, M_n \geq 4$ , respectively. If  $b_1, b_2, \dots, b_n$  are non-zero integers with  $\max(|b_1|, |b_2|, \dots, |b_{n-1}|) \leq B$  and  $|b_n| \leq B'$ ,  $B' \geq 3$ , furthermore

$$\Lambda = |b_1 \log \omega_1 + b_2 \log \omega_2 + \dots + b_n \log \omega_n| \neq 0,$$

where the logarithms are assumed to have their principal values, then there exists an effectively computable positive constant  $C$ , depending only on  $n, M_1, \dots, M_{n-1}$  and the degree of the field  $\mathbf{Q}(\omega_1, \dots, \omega_n)$  such that

$$\Lambda > \exp(-C \log B' \log M_n - B/B').$$

Lemma 1. is a result of A. Baker (see Theorem 1. in [1] with  $\delta = 1/B'$ ).

For the sake of brevity we introduce the following abbreviations. For non-negative integers  $x_1, x_2, \dots, x_m$  let

$$(11) \quad \varepsilon_j^{(i)} = \frac{p_j^{(i)}(x_i) \left(\alpha_j^{(i)}\right)^{x_i}}{a \alpha^{x_1}}, \quad \varepsilon_1 = \sum_{j=2}^{t_1} \varepsilon_j^{(1)}, \quad \varepsilon_2 = \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{t_i} \varepsilon_j^{(i)}$$

and  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ . Using (2), (4) and (6)

$$\Sigma_{x_1, x_2, \dots, x_m} = a\alpha^{x_1} + \sum_{j=2}^{t_1} p_j^{(1)}(x_1) \left(\alpha_j^{(1)}\right)^{x_1} + \sum_{i=2}^m \sum_{j=1}^{t_i} p_j^{(i)}(x_i) \left(\alpha_j^{(i)}\right)^{x_i}$$

and by (11) we have

$$(12) \quad \Sigma_{x_1, x_2, \dots, x_m} = a\alpha^{x_1} (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = a\alpha^{x_1} (1 + \varepsilon).$$

Let

$$(13) \quad \varepsilon_3 = \left( \frac{d_p}{d} \left( \frac{1}{x} \right)^{q-p} \right) \left( 1 + \frac{d_{p-1}}{d_p} \left( \frac{1}{x} \right) + \dots + \frac{d_0}{d_p} \left( \frac{1}{x} \right)^p \right).$$

So (5) can be written in the form

$$(14) \quad F(x) = dx^q(1 + \varepsilon_3).$$

The following three lemmas are due to F. Mátyás [8], where  $n_1, n_2, n_3$  means effectively computable constants.

**Lemma 2.** *Let  $G^{(1)}$  be the dominant sequence among the recurrences  $G^{(i)}$  ( $1 \leq i \leq m$ ) defined by (1). Then there are effectively computable positive constants  $c_1$  and  $n_1$  depending only on the sequence  $G^{(1)}$  such that*

$$|\varepsilon_1| < e^{-c_1 x_1}$$

for any  $n_1 < x_1$ .

**Lemma 3.** *Let  $G^{(1)}$  be the dominant sequence among the recurrences  $G^{(i)}$  ( $1 \leq i \leq m$ ) defined by (1),  $1 < K \in \mathbf{R}$  and  $x_1 > K \max_{2 \leq i \leq m} (x_i)$ . Then there are effectively computable positive constants  $c_2$  and  $n_2$  depending only on  $K$  and the sequences  $G^{(i)}$  such that*

$$|\varepsilon_2| < e^{-c_2 x_1}$$

for any  $n_2 < x_1$ .

**Lemma 4.** *Suppose that the conditions of Lemma 2 and Lemma 3 hold. Then there exist effectively computable positive constants  $c_3, c_4, n_3$  depending only on  $K$  and the sequences  $G^{(i)}$  such that*

$$e^{c_3 x_1} < |\Sigma_{x_1, x_2, \dots, x_m}| < e^{c_4 x_1}$$

for any integer  $x_1 > n_3$ .

The following lemma is due to P. Kiss and F. Mátyás [6].

**Lemma 5.** *Let  $\gamma$  be a real number with  $0 < \gamma < 1$  and let  $\mathcal{G}_{x_1, \dots, x_m}$  be an integer defined by (7), where  $x_1, \dots, x_m$  are positive integers satisfying the condition  $x_i > \gamma \max(x_1, \dots, x_t)$  and  $|\alpha_1^{(i)}| > |\alpha_j^{(i)}|$  for  $1 \leq i \leq m$  and  $2 \leq j \leq t_i$ . Then there are effectively computable positive constants  $c_5$  and  $n_4$ , depending only on the sequences  $G^{(i)}$  and  $\gamma$ , such that*

$$(15) \quad \mathcal{G}_{x_1, \dots, x_m} = \left( \prod_{i=1}^m a_i \alpha_i^{x_i} \right) (1 + \varepsilon_4),$$

where

$$|\varepsilon_4| < e^{-c_5 \cdot \max(x_1, \dots, x_m)}$$

for any  $\max(x_1, \dots, x_m) > n_4$ .

**Remark.** In general  $\alpha_1^{(i)}$  is named the dominant root of the  $i$ -th sequence, if  $\left| \alpha_1^{(i)} \right| > \left| \alpha_j^{(i)} \right|$  for  $2 \leq j \leq t_i$ .

**Proof of Theorem 1.** In the proof  $c_6, c_7, \dots$  denote effectively computable constants, which depend on  $K, \delta_1, F(x)$  and the sequences  $G^{(i)}$ . Suppose that (9) holds with the conditions given in the Theorem 1. and  $x_1$  is sufficiently large. Using (9), (14) and Lemma 4. we have

$$(16) \quad |dx^q(1 + \varepsilon_3)| = |F(x)| = |\Sigma_{x_1, x_2, \dots, x_m}| < e^{c_6 x_1}.$$

Taking the logarithms of the both side we get

$$|\log |d| + q \log x + \log |1 + \varepsilon_3|| < c_6 x_1$$

that is

$$(17) \quad q \log x < c_7 x_1.$$

Now, using (11) and (13), the equation (9) can be written in the form

$$(18) \quad \left| \frac{a\alpha^{x_1}}{dx^q} \right| = |1 + \varepsilon_3| |1 + \varepsilon|^{-1}.$$

We distinguish two cases. First we suppose that

$$a\alpha^{x_1} = dx^q.$$

Let  $\alpha' \neq \alpha$  be any conjugate of  $\alpha$  and let  $\varphi$  be an automorphism of  $\overline{\mathbf{Q}}$  with  $\varphi(\alpha) = \alpha'$ . Moreover,

$$\varphi(a) (\varphi(\alpha))^{x_1} = \varphi(dx^q).$$

Thus

$$\frac{a}{\varphi(a)} = \left( \frac{\alpha'}{\alpha} \right)^{x_1}.$$

whence  $x_1$  is bounded, which implies that  $q$  is bounded. Now we can suppose that  $\frac{a\alpha^{x_1}}{dx^q} \neq 1$ . Put

$$L_1 = \left| \log \left| \frac{a\alpha^{x_1}}{dx^q} \right| \right| = \left| \log |a| + x_1 \log |\alpha| - q \log x - \log d \right|$$

and employ Lemma 1. with  $M_4 = x, B' = q$  and  $B = x_1$ . We have

$$(19) \quad L_1 > \exp(-c_8 \log q \log x - \frac{x_1}{q}).$$



Using (9), (11), (12), (13), (14) and (17) we have

$$c_9 x^q < dx^q(1 + \varepsilon_3) = a\alpha^{x_1}(1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2) < c_{10} x^q,$$

that is

$$c_{11} x^q < \alpha^{x_1} < c_{12} x^q.$$

Using (13), the previous inequalities and the condition  $p < \delta_1 q$  we have

$$(20) \quad |\varepsilon_3| < \left(\frac{1}{x}\right)^{c_{13}(q-p)} < \left(\frac{1}{x}\right)^{c_{13}q(1-\delta_1)} < \exp(-c_{14}x_1).$$

Recalling that  $|\log(1+x)| \leq x$  and  $|\log(1-x)| \leq 2x$  for  $0 \leq x < \frac{1}{2}$  and using (20), Lemma 2. and Lemma 3. we find that

$$\left| \log |1 + \varepsilon_3| |1 + \varepsilon|^{-1} \right| < \exp(-c_{15}x_1)$$

Using (17), (18), (19) and (20) we have the following inequalities

$$c_{15}x_1 < c_8 \log q \log x + \frac{x_1}{q} < c_8 \log q \frac{c_7 x_1}{q} + \frac{x_1}{q} < c_{16}x_1 \frac{\log q}{q}.$$

This implies

$$\frac{c_{15}}{c_{16}} < \frac{\log q}{q}.$$

The previous inequality can be satisfied by only finitely many  $q$  and this completes the proof.

**Proof of Theorem 2.** Similarly the previous proof,  $c_i$ -s denote effectively computable positive constants, which depend on  $\gamma, \delta_2, F(x)$  and the sequences  $G^{(i)}$ . Suppose that (10) holds with the conditions given in Theorem 2. Let  $x_1, \dots, x_t$  be positive integers and let  $x_0 = \max(x_1, \dots, x_t)$ . We suppose that  $\alpha_s$  is the dominant root of the sequence which belongs to  $x_0$ . Using Lemma 5. we have

$$(21) \quad e^{c_{17}x_0} < \mathcal{G}_{x_1, \dots, x_m} = F(x) < e^{c_{18}x_0}$$

if  $x_0 > n_4$ . So by (10) and (21) we get

$$(22) \quad |dx^q(1 + \varepsilon_3)| = |F(x)| = |\mathcal{G}_{x_1, x_2, \dots, x_m}| < e^{c_{18}x_0}.$$

Taking the logarithms of the both side we get

$$|\log |d| + q \log x + \log |1 + \varepsilon_3|| < c_{18}x_0$$

that is

$$(23) \quad q \log x < c_{19} x_0.$$

The equation (10) can be written in the form

$$(24) \quad \frac{\prod_{i=1}^m a_i \alpha_i^{x_i}}{dx^q} = (1 + \varepsilon_3)(1 + \varepsilon_4)^{-1}.$$

We distinguish two cases. First we suppose that

$$\prod_{i=1}^m a_i \alpha_i^{x_i} = dx^q.$$

Let  $\alpha'_s \neq \alpha_s$  be any conjugate of  $\alpha_s$  and let  $\varphi$  be an automorphism of  $\overline{\mathbf{Q}}$  with  $\varphi(\alpha) = \alpha'$ . Moreover,

$$\varphi \left( \prod_{i=1}^m a_i \alpha_i^{x_i} \right) = \varphi(dx^q)$$

that is

$$\prod_{i=1}^m a_i \alpha_i^{x_i} = \varphi \left( \prod_{i=1}^m a_i \alpha_i^{x_i} \right).$$

Since  $\alpha$  dominant root,  $\varphi(\alpha_i) \leq \alpha_i$   $i = 1, 2, \dots, m$  we have

$$\left( \frac{\alpha_s}{\varphi(\alpha_s)} \right)^{x_0} \leq \frac{\varphi \left( \prod_{i=1}^m a_i \right)}{\prod_{i=1}^m a_i},$$

whence  $x_0$  is bounded, which implies that  $q$  is bounded. Now we can suppose that

$\prod_{i=1}^t a_i \alpha_i^{x_i} \neq dx^q$ . Put

$$L_2 = \left| \log \left| \frac{\prod_{i=1}^m a_i \alpha_i^{x_i}}{dx^q} \right| \right| = \left| \sum_{i=1}^m \log |a_i| + \sum_{i=1}^m x_i \log |\alpha_i| - \log d - q \log x \right|$$

and employ Lemma 1. with  $M_{2t+2} = x, B' = q$  and  $B = x_0$ . We have

$$(25) \quad L_2 > \exp(-c_{20} \log q \log x - \frac{x_0}{q}).$$

Using (15) and Lemma 5. we have

$$c_{20}x^q < dx^q(1 + \varepsilon_3) = \prod_{i=1}^m a_i \alpha_i^{x_i} (1 + \varepsilon_4) < c_{21}x^q$$

that is

$$\alpha_s^{x_0} < c_{21}x^q.$$

Using (13), the previous inequality and the condition  $p < \delta_2 q$  we have

$$(26) \quad |\varepsilon_3| < \left(\frac{1}{x}\right)^{c_{22}(q-p)} < \left(\frac{1}{x}\right)^{c_{22}q(1-\delta_2)} < \exp(-c_{23}x_0).$$

Recalling that  $|\log(1+x)| \leq x$  and  $|\log(1-x)| \leq 2x$  for  $0 \leq x < \frac{1}{2}$  and using (26) and Lemma 5. we find that

$$(27) \quad \left| \log |1 + \varepsilon_3| |1 + \varepsilon_4|^{-1} \right| < \exp(-c_{24}x_0).$$

Using (23), (24), (25), and (27) we have the following inequalities

$$c_{24}x_0 < c_{20} \log q \log x + \frac{x_0}{q} < c_{20} \log q \frac{c_{19}x_0}{q} + \frac{x_0}{q} < c_{25}x_0 \frac{\log q}{q}.$$

This implies

$$\frac{c_{24}}{c_{25}} < \frac{\log q}{q}.$$

The previous inequality can be satisfied by only finitely many  $q$  and this completes the proof.

## References

- [1] A. BAKER, A sharpening of the bounds for linear forms in logarithms II., *Acta Arithm.*, **24** (1973), 33–34.
- [2] B. BRINDZA, K. LIPTAI AND L. SZALAY, On products of the terms of linear recurrences, *Number Theory*, Eds.: Györy –Pethő–Sós, Walter de Gruyter, Berlin–New York, (1998), 101–106.
- [3] P. KISS, Differences of the terms of linear recurrences, *Studia Sci. Math. Hungar.*, **20** (1985), 285–293.
- [4] P. KISS, Note on a result of I. Nemes and A. Pethő concerning polynomial values in linear recurrences, *Publ. Math. Debrecen*, **56/3–4** (2000), 451–455.
- [5] P. KISS, Results concerning products and sum of the terms of linear recurrences, *Acta Acad. Paed. Agriensis*, **27** (2000), 1–7.

- [6] P. KISS AND F. MÁTYÁS, Perfect powers from the sums of terms of linear recurrences, *Period Math. Hung.* (accepted for publication).
- [7] P. KISS AND F. MÁTYÁS, On the product of terms of linear recurrences, *Studia Sci. Math. Hungar.* (accepted for publication).
- [8] K. LIPTAI, On polynomial values of the product of the terms of linear recurrence sequences, *Acta Acad. Paed. Agriensis*, **26** (1999), 19–23.
- [9] F. MÁTYÁS, On the difference of perfect powers and sums of terms of linear recurrences, *Rivista di Matematica Univ. Parma*, (accepted for publication).
- [10] I. NEMES AND A. PETHŐ, Polynomial values in linear recurrences, *Publ. Math. Debrecen*, **31** (1984), 229–233.
- [11] T. N. SHOREY AND C. L. STEWART, On the Diophantine equation  $ax^{2t} + bx^ty + cy^2 = d$  and pure powers in recurrence sequences, *Math. Scand.*, **52** (1982), 24–36.
- [12] L. SZALAY, A note on the products of the terms of linear recurrences, *Acta Acad. Paed. Agriensis*, **24** (1997), 47–53.

**Kálmán Liptai**

Institute of Mathematics and Informatics

Eszterházy Károly College

Leányka str. 4.

H-3300 Eger, Hungary

e-mail: liptaik@ektf.hu

## FAST ALGORITHM FOR SOLVING SUPERELLIPTIC EQUATIONS OF CERTAIN TYPES

László Szalay (Sopron, Hungary)

**Abstract.** The purpose of this paper is to give a simple, elementary algorithm for finding all integer solutions of the diophantine equation

$$y^2 = x^{2k} + a_{2k-1}x^{2k-1} + \dots + a_1x + a_0,$$

where the coefficients  $a_{2k-1}, \dots, a_0$  are integers and  $k \geq 1$  is a natural number.

**AMS Classification Number:** 11B41

### 1. Introduction

Let  $F(X)$  be a monic polynomial of even degree with integer coefficients. Suppose that  $F(X)$  is not a perfect square. We consider the diophantine equation

$$(1) \quad y^2 = F(x)$$

in integers  $x$  and  $y$ .

The present paper provides a fast and elementary algorithm for solving equation (1). The method is a generalization of a result of D. POULAKIS [4], who treated the case  $\deg(F(X)) = 4$ . (Here and in the sequel  $\deg(F(X))$  denotes the degree of the polynomial  $F(X)$ .) For other results concerning superelliptic equations see, for example, C. L. SIEGEL [5], A. BAKER [1], Y. BUGEAUD [2] or D. W. MASSER [3].

### 2. The algorithm

There is given the non-square polynomial

$$(2) \quad F(X) = X^{2k} + a_{2k-1}X^{2k-1} + \dots + a_1X + a_0, \quad (k \geq 1)$$

over the ring of rational integers. The following procedure determines all integer solutions  $(x, y)$  of the diophantine equation

$$(3) \quad y^2 = F(x).$$

**Step 1.** Find polynomials  $B(X) \in \mathbf{Q}[X]$  and  $C(X) \in \mathbf{Q}[X]$  such that

$$(4) \quad F(X) = B^2(X) + C(X)$$

with the assumption  $\deg(C(X)) < k$ .

**Step 2.** If  $C(X) = 0$  then output “ $F(X)$  is perfect square” and terminate the algorithm.

**Step 3.** Find the least natural number  $\alpha$  for which  $2\alpha B(X)$  and  $\alpha^2 C(X)$  are polynomials with integer coefficients.

**Step 4.** Set

$$(5) \quad P_1(X) = 2\alpha B(X) - 1 + \alpha^2 C(X)$$

and

$$(6) \quad P_2(X) = 2\alpha B(X) + 1 - \alpha^2 C(X).$$

**Step 5.** Let

$$(7) \quad H = \{a \in \mathbf{R} : P_1(a) = 0 \text{ or } P_2(a) = 0\}.$$

**Step 6.** If  $H \neq \emptyset$  then let  $m = \lceil \min(H) \rceil$ ,  $M = \lfloor \max(H) \rfloor$  and for each integer element  $x$  of the interval  $[m, M]$  compute  $F(x)$ . If  $F(x)$  is a square of an integer  $y$  then output the solution  $(x, \pm y)$ .

**Step 7.** Determine the integer solutions  $x$  of the equation  $C(x) = 0$ , output  $(x, B(x))$  and  $(x, -B(x))$ , and terminate algorithm.

Summarizing the method, to reach our goal first we need a special decomposition of the polynomial  $F(X)$ , then we have to determine the real roots of two polynomials. After then the integer elements of a quite short interval must be checked. Finally, we have to compute the integer solutions of a polynomial with rational coefficients.

### 3. Examples

Using the steps of the algorithm, we solve three numerical examples.

Example 1.  $y^2 = x^8 + x^7 + x^2 + 3x - 5$ ,  
 $B(X) = X^4 + \frac{1}{2}X^3 + \frac{1}{8}X^2 + \frac{1}{16}X - \frac{5}{128}$ ,  
 $C(X) = \frac{7}{128}X^3 + \frac{505}{512}X^2 + \frac{3077}{1024}X - \frac{81945}{16384}$ ,  
 $\alpha = 128 = 2^7$ ,  
 $P_1(X) = 256X^4 + 1024X^3 + 16128X^2 + 49248X - 81956$ ,  
 $P_2(X) = 256X^4 - 768X^3 - 16192X^2 - 49216X + 81936$ ,  
 $[m, M] = [-4, 10]$ ,  $C(x) = 0$  has no integer solution.  
All integer solutions are  $(x, y) = (-2, \pm 11), (1, \pm 1)$ .

Example 2.  $y^2 = x^4 - 2x^3 + 2x^2 + 7x + 3$ ,  
 $P_1(X) = 16X^2 - 528X - 167$ ,  
 $P_2(X) = 16X^2 + 496X + 183$ ,  
 $[m, M] = [-30, 33]$ ,  $C(x) = 0$  has no integer solution.  
All integer solutions are  $(x, y) = (-1, \pm 2), (1, \pm 5)$ .

Example 3.  $y^2 = x^2 - 5x - 11$ ,  
 $B(X) = X - \frac{5}{2}$ ,  $C(X) = -\frac{69}{4}$ ,  $\alpha = 2$ ,  
 $P_1(X) = 4X - 80$ ,  $P_2(X) = 4X + 60$ ,  
 $[m, M] = [-15, 20]$ .  
All integer solutions are  $(x, y) = (-5, \pm 17), (-4, \pm 5), (9, \pm 5), (20, \pm 17)$   
( $C(X) \neq 0$  is a constant polynomial, so it has no (integer) root).

**Remark.** The equation of Example 3 can easily be solved by using another simple elementary method. (The equation  $y^2 = x^2 - 5x - 11$  is equivalent to  $(2y - 2x + 5)(2y + 2x - 5) = -69$ , and the decomposition the rational integer  $-69$  into prime factors provides the solutions.) Here we only would like to demonstrate that if  $k = 1$  then the algorithm can be applied, too.

### 4. Proof of rightness of the algorithm

Going through on the steps of the described algorithm we show that the procedure is correct. As earlier, let

$$(8) \quad F(X) = X^{2k} + a_{2k-1}X^{2k-1} + \cdots + a_1X + a_0,$$

where  $k$  is an integer greater than zero.

**4.1** First we prove that the decomposition  $F(X) = B^2(X) + C(X)$  in Step 1 of the algorithm uniquely exists if we assume that the leading coefficient of  $B(X)$  is positive. We have to show that there is a polynomial

$$(9) \quad B(X) = b_k X^k + b_{k-1} X^{k-1} + \cdots + b_1 X + b_0 \in \mathbf{Q}[X]$$

( $b_k > 0$ ), such that the first  $k + 1$  coefficients coincide in  $F(X)$  and in  $B^2(X)$ . Consequently, the degree of the polynomial

$$(10) \quad C(X) = F(X) - B^2(X)$$

is less than  $k$ .

The proof depends on the fact that the system of the following  $k + 1$  equations

$$(11) \quad \begin{aligned} b_k^2 &= 1, \\ 2b_k b_{k-1} &= a_{2k-1}, \\ 2b_k b_{k-2} + b_{k-1}^2 &= a_{2k-2}, \\ &\vdots \\ 2b_k b_0 + 2b_{k-1} b_1 + \cdots &= a_k \end{aligned}$$

uniquely solvable in the rational variables  $b_k > 0, b_{k-1}, \dots, b_0$ , where the coefficients  $a_{2k-1}, \dots, a_k$  of the polynomial  $F(X)$  are fixed integers.

Observe that in the  $i^{th}$  equation of (11) ( $1 \leq i \leq k + 1$ ) there are exactly  $i$  variables and only one of them ( $b_{k+1-i}$ ) does not occur in the first  $i - 1$  equations ( $i > 1$ ). Consequently, this “new” linear variable can directly expressed from the  $i^{th}$  equation. Hence we have the unique solution

$$(12) \quad \begin{aligned} b_k &= 1 (> 0), \\ b_{k-1} &= \frac{a_{2k-1}}{2b_k} = \frac{a_{2k-1}}{2}, \\ b_{k-2} &= \frac{a_{2k-2} - b_{k-1}^2}{2b_k} = \frac{a_{2k-2}}{2} - \frac{a_{2k-1}^2}{8}, \\ &\vdots \\ b_0 &= \frac{a_k - (2b_{k-1}b_1 + \cdots)}{2b_k} = \dots \end{aligned}$$

of the system (11), which proves the unique existence of the decomposition  $F(X) = B^2(X) + C(X)$ . We note that the equations of (11) come from the coincidence of the first  $k + 1$  coefficients of  $F(X)$  and the square

$$(13) \quad B^2(X) = \sum_{i=0}^k \left( \sum_{j=0}^i b_{k-j} b_{k+j-i} \right) X^{2k-i} + B_1(X) = B_0(X) + B_1(X)$$



with some polynomial  $B_1(X)$ , where  $\deg(B_1(X)) < k$ . From (13) it follows that

$$(14) \quad B_0(X) = (b_k^2) X^{2k} + (2b_k b_{k-1}) X^{2k-1} + (2b_k b_{k-2} + b_{k-1}^2) X^{2k-2} + \dots \\ + (2b_k b_0 + 2b_{k-1} b_1 + \dots) X^k,$$

which provides the system (11).

**4.2** In the next step we check that the polynomial  $F(X)$  is perfect square or not. If  $F(X) = B^2(X)$  then the equation has infinitely many solutions and the algorithm is terminated. In the sequel, we can assume that  $C(X) \neq 0$ .

**4.3** Clearly, infinitely many natural number  $\alpha_1$  exist for which  $2\alpha_1 B(X)$  and  $\alpha_1^2 C(X)$  are polynomials with integer coefficients. Let  $\alpha$  be the least among them. Since  $C(X) = F(X) - B^2(X)$ , together with (12) it follows that  $\alpha = 2^\beta$ , where the natural number  $\beta$  depends, of course, on the degree  $k$  and the coefficients  $a_{2k-1}, \dots, a_0$  of the polynomial  $F(X)$ . For instance, it is easy to see that if  $k = 1$  then  $\beta \leq 1$ , if  $k = 2$  then  $\beta \leq 3$  and if  $k = 3$  then  $\beta \leq 4$ .

**4.4** The polynomials  $P_1(X) = 2\alpha B(X) - 1 + \alpha^2 C(X)$  and  $P_2(X) = 2\alpha B(X) + 1 - \alpha^2 C(X)$  provided by Step 4 of the algorithm possess the following properties. They have integer coefficients,  $\deg(P_1(X)) = \deg(P_2(X)) = k$  because of  $\deg(2\alpha B(X)) = k$  and  $\deg(\alpha^2 C(X) - 1) < k$ , moreover their leading coefficient  $2\alpha$  is positive.

**4.5** It follows from the first part of Step 6 of the algorithm that it is sufficient to determine approximately the real roots of the polynomial  $P_1(X)$  and  $P_2(X)$ . There are many numerical methods which give (rational) numbers very close to the exact roots, and several mathematical program package, for example MAPLE, MATHEMATICA, ..., are able to provide the approximations of the roots and establish the set  $H$ .

**4.6** In Step 6 we are checking for each integer  $x \in [m, M]$  that  $F(x)$  is square or not (it can be done by computer, too). The length of the interval  $[m, M]$  depends on the coefficients of  $F(X)$ . The examples in Section 3 show that  $[m, M]$  may be quite small.

**4.7** Now we have arrived at the main part of the proof of the rightness of the algorithm. We have to show that if an integer  $x \notin [m, M]$  and  $F(x)$  is square then  $C(x) = 0$ .

Suppose that  $x \notin [m, M]$  and  $F(x) = y^2$  for some  $x, y \in \mathbf{Z}$ . Since the leading coefficient of  $P_1(X)$  and  $P_2(X)$  is positive,  $x \notin [m, M]$  implies that  $P_1(x) > 0$  and  $P_2(x) > 0$ , or in case of odd  $k$   $P_1(x) < 0$  and  $P_2(x) < 0$  can also be occurred. Assume now that  $P_1(x) > 0$  and  $P_2(x) > 0$ , i.e.

$$(15) \quad 2\alpha B(x) - 1 + \alpha^2 C(x) > 0$$

and

$$(16) \quad 2\alpha B(x) + 1 - \alpha^2 C(x) > 0.$$

Hence

$$(17) \quad -2\alpha B(x) + 1 < \alpha^2 C(x) < 2\alpha B(x) + 1.$$

Now add anywhere  $\alpha^2 B^2(x)$  we have

$$(18) \quad (\alpha B(x) - 1)^2 < \alpha^2 (B^2(x) + C(x)) < (\alpha B(x) + 1)^2,$$

which together with  $B^2(x) + C(x) = F(x) = y^2$  provides

$$(19) \quad (\alpha B(x) - 1)^2 < \alpha^2 y^2 < (\alpha B(x) + 1)^2.$$

Since  $\alpha B(x) \pm 1$ ,  $\alpha > 0$  and  $y$  are integers it follows that  $B(x) > 0$ , moreover  $(\alpha B(x) - 1)^2$ ,  $\alpha^2 y^2$  and  $(\alpha B(x) + 1)^2$  are three consecutive squares, hence

$$(20) \quad B(x) = y^2.$$

But it means that  $C(x) = 0$ , so the integer  $x$  is a root of the polynomial  $C(X)$ .

In the other case, when  $k$  is an odd number,  $P_1(x) < 0$  and  $P_2(x) < 0$  we gain similar argument in similar manner:

$$(21) \quad (\alpha B(x) + 1)^2 < \alpha^2 y^2 < (\alpha B(x) - 1)^2,$$

which implies that  $B(x) < 0$  and  $B^2(x) = y^2$ , i.e.  $C(x) = 0$  for the integer  $x$ .

## References

- [1] BAKER, A., Bounds for the solutions of the hyperelliptic equation, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **65** (1969), 439–444.
- [2] BUGEAUD, Y., Bounds for the solutions of superelliptic equations, *Compos. Math.*, **107** (1997), 187–219.
- [3] MASSER, D. W., Polynomial bounds for diophantine equations, *Amer. Math. Monthly*, **93** (1986), 486–488.
- [4] POULAKIS, D., A simple method for solving the diophantine equation  $Y^2 = X^4 + aX^3 + bX^2 + cX + d$ , *Elem. Math.*, **54** (1999), 32–36.
- [5] SIEGEL, C. L., The integer solutions of the equation  $y^2 = ax^n + bx^{n-1} + \dots + k$ , *J. London Math. Soc.*, **1** (1926), 66–68.

**László Szalay**

Institute of Mathematics  
University of West Hungary  
Bajcsy Zs. u. 4.  
P.O. Box 132  
H-9400 Sopron, Hungary  
e-mail: laszalay@efe.hu

## SOME REMARKS ON HERON TRIANGLES

Alpar-Vajk Kramer (Medias), Florian Luca (Bielefeld)

**Abstract.** In this note, we collect a few facts about Heron triangles. For example, we show that there exist infinitely many pairs of incongruent Heron triangles having the same area and semiperimeter and that there is no Heron triangle having the radius of the circumscribed circle a power of 2 or a power of a prime number  $p$  such that  $p \equiv 11 \pmod{12}$ .

**AMS Classification Number:** 11D61, 11D72

### 1. Introduction

A *Heron triangle* is a triangle having the lengths of all its three sides as well as its area integers. There are still several nice open problems concerning Heron triangles and the book of Richard Guy [5] contains a few such. For example (see D21 in [5]), it is not known if there exist Heron triangles having all medians integers. It is also not known if there exist Pythagorean triples whose products are equal, i.e. if there is a solution of the equation

$$xy(x^4 - y^4) = zw(z^4 - w^4)$$

in nonzero integers  $(x, y, z, w)$ . Another open problem due to Harborth and Kemnitz (see [6] and [7]) asks to find all Heron triangles whose sides are members of the Fibonacci sequence. It is easy to see that such triangles have to be isosceles but the only known example is the one of sides  $(5, 5, 8)$ . Finally, we also mention that another open problem from [5] (see D18) asks for the existence of a perfect cuboid, i.e. a rectangular box with all edges, face diagonals and main diagonal integers. Incidentally, in [8], one of us showed that the existence of a perfect cuboid is equivalent with the existence of a Heron triangle whose sides are perfect squares and whose angle bisectors are rationals but it seems by no means easier to decide whether such a triangle exists. On the positive side of things, we mention that in [9] we found all Heron triangles whose sides are prime powers. Except for the Pythagorean triple  $(3, 4, 5)$  they are in one-to-one correspondence with the Fermat primes larger than 3.

---

The second author's research was partially sponsored by the Alexander von Humboldt Foundation.

In what follows, we denote by  $a$ ,  $b$ ,  $c$  the sides of a triangle and by  $A$  its area. We also use  $s$ ,  $r$  and  $R$  for the semiperimeter, radius of the inscribed circle and radius of the circumscribed circle, respectively. In this note, we collect a few remarks on Heron triangles.

## 2. Pairs of Heron triangles with the same area

In this section, we point out that there are infinitely many pairs of incongruent Heron triangles having the same area. A particularly pretty parametric family of such pairs of Heron triangles can be obtained using the familiar *Fibonacci sequence*. Recall that the Fibonacci sequence  $(F_n)_{n \geq 0}$  is the sequence having the initial values  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  and satisfying the recurrence

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$

for all integers  $n \geq 0$ . We have the following result.

**Proposition 1.** *Let  $n \geq 1$  be a positive integer. Then, there exists a pair of incongruent Heron triangles having  $A = F_n F_{n+1} F_{n+2} F_{n+3} F_{n+4} F_{n+5}$ .*

**Proof of Proposition 1.** Let  $u$  and  $v$  be two positive integers with  $u \geq 2$  and  $v \geq 1$ . Notice that the triangle  $T(u, v)$  of sides

$$\begin{aligned} a &= u^2 + v^2 \\ b &= (uv)^2 + 1 \\ c &= (uv)^2 + u^2 - v^2 - 1 \end{aligned} \tag{1}$$

has area

$$A = uv(u^2 - 1)(v^2 + 1). \tag{2}$$

Indeed, formula (2) follows immediately from the well-known formula

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{3}$$

In order to finish the proof it remains to show that one can choose the pairs  $(u, v)$  in two different ways such that the corresponding triangles  $T(u, v)$  are incongruent but they have the same area  $A$ , namely  $F_n F_{n+1} \cdots F_{n+5}$ . One can choose the pairs  $(u, v)$  such that

$$(u, v) \in \begin{cases} \{(F_{n+1}, F_{n+4}), (F_{n+2}, F_{n+3})\} & \text{if } n \text{ is even,} \\ \{(F_{n+4}, F_{n+1}), (F_{n+3}, F_{n+2})\} & \text{if } n \text{ is odd.} \end{cases} \tag{4}$$

We check only the case  $n$  even as the arguments for the case  $n$  odd are similar. Using the well-known formulae

$$F_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} = F_n F_{n+2}, \quad (5)$$

and

$$F_{n+2}^2 + (-1)^{n+1} = F_n F_{n+4}, \quad (6)$$

which hold for all integers  $n \geq 0$ , it follows easily that for  $n$  even the area of the triangle  $T_1$  of parameters  $(u, v) = (F_{n+1}, F_{n+4})$  is

$$\begin{aligned} A &= F_{n+1} F_{n+4} (F_{n+1}^2 - 1) (F_{n+4}^2 + 1) = F_{n+1} F_{n+4} (F_n F_{n+2}) (F_{n+3} F_{n+5}) = \\ &F_n F_{n+1} \cdots F_{n+5}, \end{aligned}$$

while the area of the triangle  $T_2$  of parameters  $(u, v) = (F_{n+2}, F_{n+3})$  is also

$$\begin{aligned} A &= F_{n+2} F_{n+3} (F_{n+2}^2 - 1) (F_{n+3}^2 + 1) = F_{n+2} F_{n+3} (F_n F_{n+4}) (F_{n+1} F_{n+5}) = \\ &F_n F_{n+1} \cdots F_{n+5}. \end{aligned}$$

In order to show that  $T_1$  is incongruent to  $T_2$ , it suffices to notice that the shortest side of the triangle given by formula (1) is  $a$ . Hence, it is enough to prove that

$$F_{n+1}^2 + F_{n+4}^2 \neq F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2. \quad (7)$$

We show that the left side of (7) is larger than the right side of (7). This is equivalent to

$$F_{n+4}^2 - F_{n+3}^2 > F_{n+2}^2 - F_{n+1}^2,$$

or

$$(F_{n+4} - F_{n+3})(F_{n+4} + F_{n+3}) > (F_{n+2} - F_{n+1})(F_{n+2} + F_{n+1}),$$

or

$$F_{n+2} F_{n+5} > F_n F_{n+3},$$

and this last inequality is obviously true because  $F_{n+2} > F_n$  for all integers  $n \geq 0$ .

**Remark 1.** At D21 in [5], it is also pointed out that we do not know how many primitive Pythagorean triangles can have the same area. Since every primitive Pythagorean triangle can be parametrized as

$$m^2 + n^2, \quad m^2 - n^2, \quad 2mn$$

for some coprime positive integers  $m$  and  $n$  such that  $m > n$  and  $m \not\equiv n \pmod{2}$ , this question is equivalent to finding the largest  $t$  such that there exist  $t$  pairs of generators  $(m_i, n_i)$  for  $i \in \{1, 2, \dots, t\}$  satisfying the above restrictions and with

$$m_i n_i (m_i^2 - n_i^2) = m_j n_j (m_j^2 - n_j^2) \quad \text{for all } i, j \in \{1, 2, \dots, t\}.$$

For  $t = 3$  there are five known examples namely  $(77, 38)$ ,  $(78, 55)$ ,  $(138, 5)$  found by Shedd 1945,  $(1610, 869)$ ,  $(2002, 1817)$ ,  $(2622, 143)$   $(2035, 266)$ ,  $(3306, 61)$ ,  $(3422, 55)$   $(2201, 1166)$ ,  $(2438, 2035)$ ,  $(3565, 198)$  all three found by Rathbun in 1986 and finally  $(7238, 2465)$ ,  $(9077, 1122)$ ,  $(10434, 731)$  found in consecutive days by Hoey and Rathbun. It is not known if there are infinitely many examples for  $t = 3$  or if there is any example for  $t = 4$ .

### 3. More pairs of Heron triangles with the same area and perimeter

We searched for pairs of incongruent Heron triangles having not only the same area  $A$  but also the same semiperimeter  $s$ . One such example is the pair of triangles of sides  $(24, 35, 53)$  and  $(48, 14, 50)$  both having the same area  $A = 336$  and semiperimeter  $s = 56$ . Based on this example, we found an infinite parametric family of pairs of such triangles. This family is given explicitly as follows.

**Proposition 2.** *Let  $t \geq 1$  be any positive integer and let  $T(t)$  and  $T_1(t)$  be the triangles of sides*

$$\begin{cases} a := t^8 + 5t^6 + 9t^4 + 7t^2 + 2, \\ b := t^{10} + 5t^8 + 10t^6 + 10t^4 + 6t^2 + 3, \\ c := t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 19t^4 + 11t^2 + 1, \end{cases} \quad (8)$$

and

$$\begin{cases} a_1 := t^{10} + 6t^8 + 14t^6 + 16t^4 + 9t^2 + 2, \\ b_1 := t^6 + 4t^4 + 6t^2 + 3, \\ c_1 := t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 18t^4 + 9t^2 + 1. \end{cases} \quad (9)$$

Then,  $T(t)$  and  $T_1(t)$  are incongruent Heron triangles having the same semiperimeter namely

$$s = t^{10} + 6t^8 + 15t^6 + 19t^4 + 12t^2 + 3, \quad (10)$$

and the same area, namely

$$A = t(t^2 + 1)^4(t^2 + 2)(t^4 + 3t^2 + 3). \quad (11)$$

**Proof of Proposition 2.** Rather than checking that the above triangles of sides given by formulae (8) and (9) have indeed semiperimeters and areas given by formulae (10) and (11) we will explain how we found them. For a triangle  $T$  of sides  $a$ ,  $b$ ,  $c$  and semiperimeter  $s$  we let  $x = s - a$ ,  $y = s - b$  and  $z = s - c$ . With these notations, we have  $a = y + z$ ,  $b = x + z$ ,  $c = x + y$ ,  $p = x + y + z$

and  $A = \sqrt{xyz(x+y+z)}$ . For the pairs of triangles (24, 35, 53) and (48, 14, 50) mentioned at the beginning of this section we have

$$x = 32 \quad y = 21, \quad z = 3, \quad (12)$$

and

$$x_1 = 8, \quad y_1 = 42, \quad z_1 = 6. \quad (13)$$

In order to generalize the pattern suggested by formulae (12) and (13), we look for pairs of Heron triangles with the same area and semiperimeter having

$$x = \lambda^n, \quad y = uv, \quad z = u, \quad (14)$$

and

$$x_1 = \lambda^m, \quad y = \lambda^k uv, \quad z = \lambda^k u, \quad (15)$$

where  $u, v, \lambda, m, n$  and  $k$  are integer valued parameters. Since the two triangles are to have the same semiperimeter and the same area, it follows that  $xyz = x_1 y_1 z_1$ . In particular,  $m + 2k = n$ . Imposing that

$$x + y + z = x_1 + y_1 + z_1,$$

we get

$$\lambda^n + uv + u = \lambda^m + \lambda^k(uv + u),$$

or

$$\lambda^m(\lambda^{n-m} - 1) = (\lambda^k - 1)(uv + u). \quad (16)$$

Since  $n - m = 2k$ , it follows that equation (16) can be rewritten as

$$\lambda^m(\lambda^{2k} - 1) = (\lambda^k - 1)(uv + u),$$

or

$$\lambda^m(\lambda^k + 1) = u(v + 1). \quad (17)$$

At this point, we can choose  $u = \lambda^k + 1$  and  $v = \lambda^m - 1$  and formula (17) holds. The last condition that we need to insure is that the common value of the area of the two triangles is indeed an integer. Hence, the number

$$xyz(x + y + z)$$

needs to be a perfect square. Using the preceding substitutions we get that

$$\begin{aligned} xyz(x + y + z) &= \lambda^n u^2 v (\lambda^n + u(v + 1)) = \lambda^n (\lambda^k + 1)^2 (\lambda^m - 1) (\lambda^n + \lambda^m (\lambda^k + 1)) = \\ &= \lambda^{m+n} (\lambda^k + 1)^2 (\lambda^m - 1) (\lambda^{2k} + \lambda^k + 1) = \lambda^{2m+2k} (\lambda^k + 1)^2 (\lambda^m - 1) (\lambda^{2k} + \lambda^k + 1). \end{aligned} \quad (18)$$

In order for the number given by formula (18) to be a perfect square, it suffices to choose  $\lambda$ ,  $k$  and  $m$  such that

$$(\lambda^m - 1)(\lambda^{2k} + \lambda^k + 1) \quad (19)$$

is a perfect square. If we choose  $m = 3k$ , the number given by formula (19) becomes

$$(\lambda^{3k} - 1)(\lambda^{2k} + \lambda^k + 1) = (\lambda^k - 1)(\lambda^{2k} + \lambda^k + 1)^2. \quad (20)$$

Now the number given by formula (20) is a perfect square when  $k = 1$  and  $\lambda = t^2 + 1$  for some positive integer  $t$ . Hence,  $m = 3$ ,  $n = 5$ ,  $u = \lambda + 1 = t^2 + 2$ , and  $v = \lambda^3 - 1 = (t^2 + 1)^3 - 1 = t^6 + 3t^4 + 3t^2$ . Working backwards we find that the triangles given by formulae (14) and (15) are exactly the ones given by Proposition 2.

**Remark 2.** We point out that the statement of Proposition 2 is nontrivial in the sense that the pairs  $(T(t), T_1(t))_{t \geq 1}$  are not similar for different values of  $t$ . Indeed, since the two Heron triangles  $(24, 35, 53)$  and  $(48, 14, 50)$  have the same area and semiperimeter, it follows that the two Heron triangles  $(24t, 35t, 53t)$  and  $(48t, 14t, 50t)$  have the same area and semiperimeter as well for any positive integer  $t$ . Of course, this is not a very interesting family. To see why the statement of Proposition 2 is non-trivial, notice first that by formula (8),  $c$  is always odd. In particular,  $\gcd(a, b, c) = \gcd(x, y, z)$  for the triangle  $T(t)$ . But now, by formula (14) and the substitutions from the proof of Proposition 2, one has

$$\gcd(x, y, z) = \gcd(x, u) = \gcd(\lambda^n, \lambda^k + 1) = 1.$$

In particular, the Heron triangle  $T(t)$  is always primitive. Unfortunately, the triangle  $T_1(t)$  is never primitive as it can be immediately noticed from formula (15).

Our Proposition 2 provides an infinite family of pairs of Heron triangles having the same area and semiperimeter but these are not all of them. For example, the pairs of Heron triangles  $\{(51, 52, 101), (17, 87, 100)\}$ , or  $\{(20, 21, 29), (17, 25, 28)\}$  or  $\{(17, 28, 39), (12, 35, 37)\}$  have the same areas and semiperimeters but they are not particular instances of our general family given by formulae (8) and (9). We conclude this section by suggesting the following problem.

**Problem.** *Find the largest  $k$  for which there exist  $k$  mutually incongruent Heron triangles having the same area and semiperimeter.*

#### 4. Heron triangles whose area has prescribed prime factors

In this section, we take a look at the prime factors of the area of a Heron triangle.



Let  $\mathcal{P}$  be a finite set of primes and let

$$\mathcal{S} := \left\{ n \geq 1 : n = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{\alpha_p} \text{ for some } \alpha_p \geq 0 \right\}. \quad (21)$$

That is, for a fixed finite set of prime numbers  $\mathcal{P}$ , we let  $\mathcal{S}$  be the set of all positive integers whose prime factors belong to  $\mathcal{P}$ . We first investigate the problem of finding all the Heron triangles having  $A \in \mathcal{S}$ . We should first notice that if  $T := (a, b, c)$  is a Heron triangle having  $A \in \mathcal{S}$ , then  $d := \gcd(a, b, c) \in \mathcal{S}$  as well. Moreover, if we let  $a = da_1$ ,  $b = db_1$  and  $c = dc_1$ , then  $T_1 := (a_1, b_1, c_1)$  is a Heron triangle as well and its area  $A_1 \in \mathcal{S}$ . Hence, it suffices to restrict our attention to primitive Heron triangles  $T := (a, b, c)$ . Our first result in this direction is the following.

**Proposition 3.** *Let  $\mathcal{P}$  be a fixed finite set of primes and let  $\mathcal{S}$  be given by formula (21). Then, there exist only finitely many primitive Heron triangles having  $A \in \mathcal{S}$ .*

**Proof of Proposition 3.** Assume that  $T := (a, b, c)$  satisfies  $A \in \mathcal{S}$ . Write again  $x = s - a$ ,  $y = s - b$  and  $z = s - c$ . Since  $T$  is primitive, it follows that  $\gcd(x, y, z) = 1$ . Now the containment  $A \in \mathcal{S}$  together with the fact that

$$xyz(x + y + z) = A^2, \quad (22)$$

imply

$$x + y + z \in \mathcal{S}, \quad \text{where } x, y \text{ and } z \in \mathcal{S}. \quad (23)$$

Equation (23) is known as an  *$\mathcal{S}$ -unit equation* and it has only finitely many solutions satisfying  $\gcd(x, y, z) = 1$  by a result of Evertse (see [4]). Unfortunately,

the proof of Evertse from [4] concerning the finiteness of the number of solutions of equation (23) is not effective. In particular, this means that, apriori, there is no algorithm which for a given  $\mathcal{P}$  will allow one to list all primitive Heron triangles having  $A \in \mathcal{S}$ . It is also known and easy to prove that if  $A$  is the area of a Heron triangle, then  $6 \mid A$ . In particular, if one starts with a set  $\mathcal{P}$  of primes and one wants any Heron triangles at all with area  $A \in \mathcal{S}$ , then one should allow  $2, 3 \in \mathcal{P}$ . In light of these remarks and of Proposition 3, it makes sense to ask if one can determine all the Heron triangles having  $A \in \mathcal{S}$  when  $\mathcal{P} = \{2, 3\}$ . Here is the result.

**Proposition 4.** *Assume that  $T$  is a primitive Heron triangle having  $S = 2^\alpha \cdot 3^\beta$  for some non-negative integers  $\alpha$  and  $\beta$ . Then,  $T$  is congruent to one of the following 10 Heron triangles*

$$\begin{aligned} (3, 4, 5), \quad (3, 25, 26), \quad (4, 13, 15), \quad (5, 5, 6), \quad (5, 5, 8), \\ (5, 29, 30), \quad (9, 10, 17), \quad (9, 73, 80), \quad (13, 244, 255), \quad (17, 65, 80). \end{aligned} \quad (24)$$

**Proof of Proposition 4.** By equations (22) and (23), it follows that every primitive Heron triangle  $T := (a, b, c)$  having  $A = 2^\alpha \cdot 3^\beta$  can be found by first solving equation

$$x + y + z = w, \quad (25)$$

where  $\gcd(x, y, z) = 1$ , the prime factors of  $x, y$  and  $z$  are in the set  $\{2, 3\}$  subject to the additional restriction that  $xyzw$  is a square. One can easily solve the above equation (even without the restriction that  $xyzw$  is a square) using the results of Mo De Ze and R. Tijdeman from [3] (based on Baker's method) in a matter of seconds on a PC, also in the case when the primes 2, 3 are replaced by any pair of primes not exceeding 200. We also point out that equation (25) was solved by elementary means by Leo J. Alex and Lorraine Foster in the series of papers [1] and [2] even when the set of primes  $\{2, 3\}$  is replaced by the larger set of primes  $\{2, 3, 5\}$ . One can now look at all such solutions listed in [1] and [2] and conclude that the only Heron triangles satisfying the hypothesis of Proposition 4 are indeed the ones listed at (24). We omit further details.

**Remark 3.** In the upcoming paper [10], we show that if  $\mathcal{P}$  is a given set of finitely many prime numbers, then there exist only finitely many primitive Heron triangles having  $abc \in \mathcal{S}$ . Although the full result is not effective, it can be made effective in some instances. For example, in [10], we find all primitive Heron triangles having the property that the maximal prime divisor of  $abc$  does not exceed 11.

## 5. Heron triangles with prescribed $r$ or $R$

In this section, we leave the issues concerning areas of Heron triangles and we look at existence results for Heron triangles with given integer  $r$  or  $R$ . Our main results here are the following.

**Proposition 5.** *Let  $k \geq 1$  be a positive integer. Then, there exists a Heron triangle  $T$  having  $r = k$ .*

**Proof of Proposition 5.** We use the notations  $x, y, z$ , etc. from the preceeding sections. Since  $r = A/s$ , it suffices to show that the equation

$$\frac{xyz}{x + y + z} = k^2 \quad (26)$$

has a positive solution  $x, y, z$ . We choose  $z = 1$  and equation (26) becomes

$$xy = k^2(x + y + 1),$$

or

$$x(y - k^2) = k^2(y + 1),$$

or

$$x = \frac{k^2(y+1)}{y-k^2}. \quad (27)$$

Clearly, one may now choose  $y = k^2 + 1$  and then formula (27) tells us that  $x = k^4 + 2k^2$ . Hence, the triangle of sides  $a = k^2 + 2$ ,  $b = k^4 + 2k^2 + 1$  and  $c = k^4 + 3k^2 + 1$  is a Heron triangle with  $r = k$ .

While Proposition 5 shows that one can construct Heron triangles of arbitrary integer radius  $r$ , this is no longer true if one replaces  $r$  by  $R$ , but it is "almost" true. That is, we have the following result.

**Proposition 6.** 1. *The set of positive integers  $k \geq 1$  for which there exists a Heron triangle having  $R = k$  has asymptotic density 1.*

2. *There is no Heron triangle having  $R$  a power of 2 or a power of a prime number  $p$  such that  $p \equiv 11 \pmod{12}$ .*

**Proof of Proposition 6, Part 1.** Let  $p$  be a prime which is congruent to 1 modulo 4. Since  $p$  is a sum of two squares, we can write  $p = u^2 + v^2$ . Then, the triangle of sides

$$a = 2(u^2 + v^2), \quad b = 2|u^2 - v^2|, \quad c = 4uv \quad (28)$$

is Heron and has  $R = u^2 + v^2 = p$ . Indeed, this follows immediately from the fact that the above triangle is right angled, so its  $R$  is equal to half of its hypotenuse. It is now clear that if  $k$  is an arbitrary positive integer which is a multiple of  $p$ , then there exists a Heron triangle of radius  $R = k$ . To see this, it suffices to consider the triangle which is similar to the triangle given by (28) but whose sides are  $k/p$  times longer. The conclusion of 1 follows now from the fact that almost every positive integer is divisible by a prime  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

Before proving Part 2 of Proposition 6, we need to make some considerations concerning arbitrary Heron triangles. Assume that  $T := (a, b, c)$  is a Heron triangle of area  $A$  and semiperimeter  $s$  and let again  $x = s - a$ ,  $y = s - b$ ,  $z = s - c$ . Assume also that  $D = \gcd(x, y, z)$  and write  $x = Du$ ,  $y = Dv$  and  $z = Dw$ . The following Lemma turns out to be useful.

**Lemma.** (i.) *One of the numbers  $u, v, w$  is odd and one of them is even. In particular,  $\gcd(a, b, c) = D$ .*

(ii.) *If  $p$  is an odd prime such that  $p \mid \gcd(u + v, u + w)$ , then  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .*

**Proof of the Lemma.** (i.) Since  $\gcd(u, v, w) = 1$ , it follows that at least one of the numbers  $u, v, w$  is odd. We now show that not all of them can be odd. Indeed, since  $D \mid \gcd(a, b, c)$ , it follows that the triangle of sides  $a_1 = a/D$ ,  $b_1 = b/D$ ,  $c_1 = c/D$  is a Heron triangle of well. Its area  $A_1$  is certainly given by the formula

$$uvw(u + v + w) = A_1^2. \quad (29)$$

Since  $6 \mid A_1$ , it follows that one of the numbers  $u, v, w$  is even. It now follows right away that  $\gcd(a, b, c) = D$ .

(ii.) We keep the previous notations. Assume that  $p$  is an odd prime number with  $p \mid \gcd(u + v, u + w) = \gcd(b_1, c_1)$ . Straightforward computations using the Heron formula for the area  $A_1$  show that formula (29) can be rewritten as

$$-a_1^4 - b_1^4 - c_1^4 + 2a_1^2b_1^2 + 2a_1^2c_1^2 + 2b_1^2c_1^2 = A_1^2. \quad (30)$$

Reducing equation (30) modulo  $p$ , we get

$$-a_1^4 \equiv A_1^2 \pmod{p}. \quad (31)$$

Since  $\gcd(a_1, b_1, c_1) = 1$ , it follows that  $p \nmid a_1$ . Now formula (31) shows that  $-1$  is a quadratic residue modulo  $p$ , which implies that  $p \equiv 1 \pmod{4}$ .

**Proof of Proposition 6, Part 2.** We begin with some general considerations concerning Heron triangles having integer  $R$  and then we will specialize to the cases in which  $R$  is a power of 2 or a power of a prime number  $p \equiv 11 \pmod{12}$ . We first deal with a few technicalities due mainly to the fact that we work with arbitrary Heron triangles and not only with primitive ones. We use the formula

$$4RS = abc. \quad (32)$$

We write again  $x = s - a$ ,  $y = s - b$ ,  $z = s - c$  and  $D = \gcd(x, y, z)$ . Hence, we can write  $x = Du$ ,  $y = Dv$ ,  $z = Dw$ , where  $\gcd(u, v, w) = 1$ . Now formula (32) can be written as

$$16R^2uvw(u + v + w) = D^2(u + v)^2(u + w)^2(v + w)^2. \quad (33)$$

In what follows, for two positive integers  $s$  and  $t$ , we use sometimes the notation  $d_{s,t}$  to designate the greatest common divisor of  $s$  and  $t$ . Notice that since  $\gcd(u, v, w) = 1$ , it follows that

$$\gcd(d_{u,v}, d_{u,w}) = \gcd(d_{v,u}, d_{v,w}) = \gcd(d_{w,u}, d_{w,v}) = 1, \quad (34)$$

and

$$\begin{aligned} \gcd(d_{u+v,w}, d_{u,v}d_{u,w}d_{v,w}) &= \gcd(d_{u+w,v}, d_{u,v}d_{u,w}d_{v,w}) = \\ \gcd(d_{v+w,u}, d_{u,v}d_{u,w}d_{v,w}) &= 1. \end{aligned} \quad (35)$$

We can now make some cancellations in both sides of formula (33) and get

$$\begin{aligned} 16R^2 \frac{u}{d_{u,v}d_{u,w}d_{u,v+w}} \cdot \frac{v}{d_{v,u}d_{v,w}d_{v,u+w}} \cdot \frac{w}{d_{w,u}d_{w,v}d_{w,u+v}} \cdot \frac{u+v+w}{d_{u,v+w}d_{v,u+w}d_{w,u+v}} = \\ D^2 \left( \frac{u+v}{d_{u,v}d_{u+v,w}} \right)^2 \cdot \left( \frac{u+w}{d_{u,w}d_{u+w,v}} \right)^2 \cdot \left( \frac{v+w}{d_{v,w}d_{v+w,u}} \right)^2. \end{aligned} \quad (36)$$

While formula (36) looks uglier than formula (33), it does have the advantage that it points out that each one of the last three square factors appearing in the right hand side of (36) must divide the factor  $16R^2$  from the left hand side of formula (36) (simply because they are coprime with the remaining factors from the left hand side of formula (36)). In particular, we get that

$$\left(\frac{u+v}{d_{u,v}d_{u+v,w}}\right)\left(\frac{u+w}{d_{u,w}d_{u+w,v}}\right)\left(\frac{v+w}{d_{v,w}d_{v+w,u}}\right) \mid 4R. \quad (37)$$

Let us look at the factors

$$\left(\frac{u+v}{d_{u,v}d_{u+v,w}}\right), \quad \left(\frac{u+w}{d_{u,w}d_{u+w,v}}\right), \quad \left(\frac{v+w}{d_{v,w}d_{v+w,u}}\right) \quad (38)$$

from the right hand side of relation (37). By i of the above Lemma, we get that at least two of the numbers of list (38) are odd. Now by ii of the above Lemma, it follows that the greatest common divisor of any two numbers from list (38) is divisible only with primes which are congruent to 1 modulo 4. These considerations show that the only possibilities for the three numbers from list (38) are

$$1, 1, 2^\alpha \quad \text{for some } \alpha \geq 0, \quad (39)$$

if  $R$  is a power of 2 and

$$1, 2^\alpha, q, \quad \text{or} \quad 1, 1, 2^\alpha q \quad \text{for some } \alpha \in \{0, 1, 2\}, \quad (40)$$

if  $R = q$  is a power of a prime number  $p$  such that  $p \equiv 11 \pmod{12}$ . At any rate, we may assume that the first number of list (38) is 1. In this case, one can write

$$d_{u,v} = d, \quad u = d\alpha, \quad v = d\beta, \quad w = (\alpha + \beta)\gamma, \quad (41)$$

where  $\gcd(\alpha, \beta) = 1$ . Since  $\gcd(u, v, w) = 1$ , it follows easily that

$$d_{u,w} = \gcd(d\alpha, (\alpha + \beta)\gamma) = \gcd(\alpha, (\alpha + \beta)\gamma) = d_{\alpha,\gamma}, \quad (42)$$

and

$$d_{u+w,v} = \gcd(d\alpha + (\alpha + \beta)\gamma, d\beta) = \gcd((d + \gamma)\alpha + \beta\gamma, \beta) = d_{d+\gamma,\beta}. \quad (43)$$

Similarly, one can show that

$$d_{v,w} = d_{\beta,\gamma}, \quad (44)$$

and

$$d_{v+w,u} = d_{d+\gamma,\alpha}. \quad (45)$$

With these formulae, we get easily that the second and the third number from list (38) are

$$\frac{u+w}{d_{u,w}d_{u+w,v}} = \frac{d\alpha + (\alpha + \beta)\gamma}{d_{\alpha,\gamma}d_{d+\gamma,\beta}} = \frac{\alpha(d+\gamma)}{d_{\alpha,\gamma}d_{d+\gamma,\beta}} + \frac{\gamma\beta}{d_{\alpha,\gamma}d_{d+\gamma,\beta}}, \quad (46)$$

and

$$\frac{v+w}{d_{v,w}d_{v+w,u}} = \frac{d\beta + (\alpha + \beta)\gamma}{d_{\beta,\gamma}d_{d+\gamma,\alpha}} = \frac{\beta(d+\gamma)}{d_{\beta,\gamma}d_{d+\gamma,\alpha}} + \frac{\gamma\alpha}{d_{\beta,\gamma}d_{d+\gamma,\alpha}}. \quad (47)$$

Formulae (46) and (47) show that each one of the last two numbers of list (38) are strictly larger than 1 (they are each a sum of two positive integers). In particular, this rules out the possibility that  $R$  is a power of 2 (compare to list (39)). We shall now only sketch the remaining of the proof of the fact that  $R$  cannot be a power of a prime  $p$  with  $p \equiv 11 \pmod{12}$ . Assume that this is not so. By the above considerations and formula (40), it follows that the only possibilities for the numbers from list (38) are

$$1, 2, q, \quad \text{or} \quad 1, 4, q. \quad (48)$$

If the second number from list (38) is 2, then we use formula (46) to conclude that

$$\left(\frac{\alpha}{d_{\alpha,\gamma}}\right) \cdot \left(\frac{(d+\gamma)}{d_{d+\gamma,\beta}}\right) = \left(\frac{\gamma}{d_{\alpha,\gamma}}\right) \cdot \left(\frac{\beta}{d_{d+\gamma,\beta}}\right) = 1. \quad (49)$$

Formula (49) implies that  $\alpha = \gamma$  and that  $\beta = d + \gamma$ . The last formulae imply that  $d = \beta - \gamma$ , therefore

$$u = (\beta - \gamma)\gamma, \quad v = (\beta - \gamma)\beta, \quad w = (\gamma + \beta)\gamma, \quad (50)$$

and since  $\gcd(u, v, w) = 1$ , it follows that  $\gamma \not\equiv \beta \pmod{2}$ . We now get that

$$v + w = (\beta - \gamma)\beta + (\gamma + \beta)\gamma = \beta^2 + \gamma^2. \quad (51)$$

Moreover,

$$d_{v,w} = \gcd((\beta - \gamma)\beta, (\gamma + \beta)\gamma) = 1, \quad (52)$$

and

$$d_{v+w,u} = \gcd(\gamma^2 + \beta^2, (\beta - \gamma)\gamma) = 1, \quad (53)$$

because  $d_{\beta,\gamma} = 1$  and  $\beta$  and  $\gamma$  are incongruent modulo 2. Thus, the last number of list (38) is

$$q = \beta^2 + \gamma^2. \quad (54)$$

Equation (54) is impossible because  $q$  is a power of a prime  $p$  with  $p \equiv 3 \pmod{4}$ . When the second number of list (38) is 4, then one uses formula (46) to conclude that the only possibilities are

$$\left( \left( \frac{\alpha}{d_{\alpha,\gamma}} \right) \cdot \left( \frac{(d+\gamma)}{d_{d+\gamma,\beta}} \right), \left( \frac{\gamma}{d_{\alpha,\gamma}} \right) \cdot \left( \frac{\beta}{d_{d+\gamma,\beta}} \right) \right) \in \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}. \quad (55)$$

The case (2, 2) above can be ruled out easily by considerations modulo 2. In the remaining two cases, an analysis similar to the one done above when the second number from list (38) was 2, leads to a representation of  $q$  of the form  $q = \gamma^2 + 3\delta^2$  which is impossible because  $q$  is a power of a prime  $p$  with  $p \equiv 11 \pmod{12}$ . We do not give further details. Proposition 6 is therefore completely proved.

**Remark 4.** The above proof of the second assertion of Proposition 6 does much more than simply prove it. A careful investigation of the arguments employed in it show, for example, that if  $p$  is a prime number such that  $p \equiv 5 \pmod{12}$ , then there exists a unique Heron triangle having  $R = p$ , which is a Pythagorean triangle. In particular, the triangle (6, 8, 10) is the unique Heron triangle with  $R = 5$ .

## Acknowledgements

We thank an anonymous referee for spotting several errors and inaccuracies in a previous version of this paper and Professor W. Narkiewicz for pointing out to us the papers [1] and [2].

This work was done while the second author was visiting the Mathematical Institute of the Czech Academy of Sciences. He would like to thank the people of this Institute and especially Michal Křížek for their warm hospitality.

## References

- [1] ALEX, L. J., FOSTER, L. L., On the diophantine equation  $1 + x + y = z$ , *Rocky Mtn. J. of Math.* **22** (1992), 11–62.
- [2] ALEX, L. J., FOSTER, L. L., On the diophantine equation  $w + x + y = z$  with  $xyz = 2^r \cdot 3^s \cdot 5^t$ , *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid* **8** (1995), 13–48.
- [3] DE ZE, M., TIJDEMAN, R., Exponential Diophantine equations with four terms, *Indag. Math. (N.S.)* **3** (1992), 47–57.
- [4] EVERTSE, J. H., On sums of  $S$ -units and linear recurrences, *Compositio Math.* **53** (1984), 225–244.
- [5] GUY, R. K., Unsolved problems in number theory, Springer-Verlag, 1994.
- [6] HARBORTH, H., KEMNITZ, A., Fibonacci triangles, in *Applications of Fibonacci numbers* **6** Pisa, 1988, 129–132, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1990.

- [7] HARBORTH, H., KEMNITZ, ROBBINS, N., Non-existence of Fibonacci triangles, *Cong. Numer.* **114** (1996), 29–31.
- [8] LUCA, F., A note on the perfect cuboid, *Math. Mag.*, to appear.
- [9] LUCA, F., Fermat primes and Heron triangles with prime power sides, submitted.
- [10] LUCA, F., The largest prime divisor of the sides of a Heron triangle, in preparation.

**Alpar-Vajk Kramer**  
Cuza Vodă 13  
3125 Mediaş, Romania

**Florian Luca**  
Mathematics Department  
Bielefeld University  
Postfach 10 01 31  
33 501 Bielefeld, Germany



## SOME REMARKS ON FERMAT'S EQUATION IN THE SET OF MATRICES

Zhenfu Cao (China), Aleksander Grytczuk (Poland)

**Abstract.** Let  $\mathbf{Z}$  be the set of integers and  $SL_2(\mathbf{Z})$  the set of  $2 \times 2$  integral matrices with  $\det A = 1$  for  $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ . If any two of  $SL_2(\mathbf{Z})$  are commutative, then the set of such matrices we denote by  $\overline{SL_2(\mathbf{Z})}$ . In this paper, we prove that Fermat's equation  $(*) X^n + Y^n = Z^n$  has a solution in the set  $\overline{SL_2(\mathbf{Z})}$  if and only if  $n \equiv 1 \pmod{6}$  or  $n \equiv 5 \pmod{6}$ . This criterion is connected with a criterion given recently by Khazanov [4]. Moreover, we indicate a subclass of the matrices of  $SL_2(\mathbf{Z})$  for which  $(*)$  has no solutions for arbitrary positive integers  $n \geq 2$ .

**AMS Classification Number:** 11C20, 11D41

### 1. Introduction

Following recently results given by Wiles [8] and Taylor and Wiles [7] we know that Fermat's equation

$$X^n + Y^n = Z^n \tag{*}$$

has no solutions in positive integers if  $n > 2$ . But in contrast to this situation Fermat's equation  $(*)$  has infinitely many solutions in  $2 \times 2$  integral matrices for exponent  $n = 4$ . This fact was discovered in 1966 by Domiaty [3]. He remarked that if

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c & 0 \end{pmatrix},$$

where  $a, b, c$  are integer solutions of the Pythagorean equation  $a^2 + b^2 = c^2$  then  $X^4 + Y^4 = Z^4$ . Another results connected with Fermat's equation in the set of matrices are described by Ribenoim in [5].

Important problem in these investigations is to give a necessary and sufficient condition for solvability of  $(*)$  in the set of matrices. Let  $\mathbf{Z}$  be the set of integers and  $SL_2(\mathbf{Z})$  the set of  $2 \times 2$  integral matrices with  $\det A = 1$  for  $A \in SL_2(\mathbf{Z})$ . If any two of  $SL_2(\mathbf{Z})$  are commutative, then the of such matrices we denote by  $\overline{SL_2(\mathbf{Z})}$ . Recently, Khazanov [4] find such condition for the case when the matrices

$X, Y, Z \in SL_2(\mathbf{Z})$ . He proved that there are solutions of  $(*)$  in  $X, Y, Z \in SL_2(\mathbf{Z})$  if and only if the exponent  $n$  is not multiple of 3 or 4.

In this paper, we firstly prove the following:

**Theorem 1.** *The Fermat's equation  $(*)$  has a solution in  $\overline{SL_2(\mathbf{Z})}$  if and only if  $n \equiv 1 \pmod{6}$  or  $n \equiv 5 \pmod{6}$ .*

From Theorem 1 follows that the set of exponents  $n \pmod{12}$  for which  $(*)$  is solvable reduce to 4 classes when  $X, Y, Z \in \overline{SL_2(\mathbf{Z})}$ , but if  $X, Y, Z \in SL_2(\mathbf{Z})$  then Khazanov's result implies that this set has 6 classes mod 12.

Moreover, we consider the set of matrices of the following form:

$$G_2(k, \Delta) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ ks & r \end{pmatrix}; r, s \in \mathbf{Z}, 0 < k \in \mathbf{Z}, \det \begin{pmatrix} r & s \\ ks & r \end{pmatrix} = \Delta \right\}, \quad (1)$$

where  $k > 0, \Delta \neq 0$  are fixed integers. We note that if  $\Delta = 1$  then  $G_2(k, \Delta) = G_2(k, 1) \subset SL_2(\mathbf{Z})$ . In [2], using Wiles' result on Fermat's last theorem, we proved

**Theorem 2.** *The Fermat's equation  $(*)$  has no solutions in elements  $X, Y, Z \in G_2(k, \Delta)$  for arbitrary positive integers  $n \geq 2$ .*

In this paper, we give a new proof of Theorem 2 without using a strong result of Wiles.

## 2. Proof of Theorem 1

In the proof of Theorem 1 we use of the following:

**Lemma 1.** *Let  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  be a given integral matrix. Then for every natural number  $n \geq 2$*

$$A^n = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} F(a) & b\Psi_1 \\ c\Psi_1 & F(d) \end{pmatrix} \quad (2)$$

where  $F(a) = F(a; b, c, d), F(d) = F(d; a, b, c), \Psi_1 = \Psi_1(a, b, c, d)$  are polynomials such that

$$F(a) - F(d) = (a - d)\Psi_1. \quad (3)$$

The proof of this Lemma is given in [1].

Now, suppose that there exists elements  $X, Y, Z \in \overline{SL_2(\mathbf{Z})}$  such that

$$X^n + Y^n = Z^n. \quad (4)$$

By the assumption, we know that  $\det X = \det Y = \det Z = 1$ , so  $Z^{-1} \in SL_2(\mathbf{Z})$  and consequently we have  $XZ^{-1} = Z^{-1}X$ ,  $YZ^{-1} = Z^{-1}Y$ . Hence (4) is equivalent to

$$(XZ^{-1})^n + (YZ^{-1})^n = I, \quad (5)$$

where  $I$  is identity matrix and  $Z^{-1}$  is inverse matrix to  $Z$ . Let  $A = XZ^{-1}$  and  $B = YZ^{-1}$ , then by the assumption it follows that  $\det A = \det B = 1$  and (5) reduce to the equation

$$A^n + B^n = I \quad (6)$$

where  $A, B \in SL_2(\mathbf{Z})$ . Let  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  and  $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ . Then by Lemma 1

$$A^n = \begin{pmatrix} F(a) & b\Psi_1 \\ c\Psi_1 & F(d) \end{pmatrix}, \quad B^n = \begin{pmatrix} G(e) & f\Psi_2 \\ g\Psi_2 & G(h) \end{pmatrix} \quad (7)$$

where

$$F(a) - F(d) = (a - d)\Psi_1, \quad G(e) - G(h) = (e - h)\Psi_2. \quad (8)$$

From (6) and (7) we obtain

$$F(a) + G(e) = F(d) + G(h) = 1, \quad b\Psi_1 + f\Psi_2 = c\Psi_1 + g\Psi_2 = 0. \quad (9)$$

Since  $\det A = \det B = 1$  then by Cauchy's theorem on product of determinants follows  $\det A^n = \det B^n = 1$  and consequently from (7) we get

$$F(a)F(d) - bc\Psi_1^2 = G(e)G(h) - gf\Psi_2^2 = 1. \quad (10)$$

From (9) we have  $b\Psi_1 = -f\Psi_2$  and  $c\Psi_1 = -g\Psi_2$ , thus  $bc\Psi_1^2 = fg\Psi_2^2$ . By the last equality and (10), it follows that

$$F(a)F(d) = G(e)G(h). \quad (11)$$

On the other hand from (9) we have  $F(a) = 1 - G(e)$  and  $F(d) = 1 - G(h)$  and substitutting to (11) we obtain

$$G(e) + G(h) = 1. \quad (12)$$

From (12) and the fact that  $F(a) + F(d) = 2 - (G(e) + G(h))$  follows

$$F(a) + F(d) = 1. \quad (13)$$

From (13) and (12) we have

$$\text{Tr} A^n = F(a) + F(d) = 1, \quad \text{Tr} B^n = G(e) + G(h) = 1. \quad (14)$$

Let  $\alpha, \beta$  be the eigenvalues of the matrix  $A$ . Then it is well-known that the matrix  $A^n$  has eigenvalues  $\alpha^n, \beta^n$  such that

$$\text{Tr} A^n = \alpha^n + \beta^n, \quad \det A^n = \alpha^n \beta^n. \quad (15)$$

By (15) and (14) it follows that

$$\alpha^n + \beta^n = 1, \quad \alpha^n \beta^n = 1. \quad (16)$$

From (16) we obtain

$$\alpha^{2n} - \alpha^n + 1 = 0. \quad (17)$$

Let  $\alpha^n = x$  then (17) reduce to quadratic equation with the following complex roots

$$x_1 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, x_2 = \bar{x}_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}. \quad (18)$$

Now, we observe that the condition  $\alpha^n = x_1, x_2$ , where  $x_1, x_2$  are given by (18) implies that  $\alpha$  is a complex number. Since  $\alpha = \frac{a+d+\sqrt{(a+d)^2-4\det A}}{2}$  and  $\det A = 1$  then  $(a+d)^2 - 4 < 0$  so is equivalent to  $-2 < a+d < 2$ . Hence it remains to consider three following cases: 1.  $a+d = -1$ ; 2.  $a+d = 0$ ; 3.  $a+d = 1$ .

In the first case we have  $\alpha = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$  is the root of unity of degree 3. If we consider the exponent  $n$  with respect to modulo 6 then we get  $\alpha^{6k} = 1 \neq x_1, x_2$ ;  $\alpha^{6k-1} = \alpha \neq x_1, x_2$ ;  $\alpha^{6k+2} = \alpha^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \neq x_1, x_2$ ;  $\alpha^{6k+3} = \alpha^3 = 1 \neq x_1, x_2$ ;  $\alpha^{6k+4} = \alpha \neq x_1, x_2$  and  $\alpha^{6k+5} = \alpha^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} \neq x_1, x_2$ . Hence in this case the equation (6) is impossible.

Suppose that case 2 is satisfied. Then we have  $\alpha = i$  and by similar way considering the exponent  $n$  with respect to modulo 4 we obtain in all cases that  $\alpha^n = i^n \neq x_1, x_2$ .

It remains to consider the last case, i.e.  $a+d = 1$ . In this case we have  $\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  and consequently the equality  $\alpha^n = x_1, x_2$  is possible when  $n \equiv 1 \pmod{6}$  or  $n \equiv 5 \pmod{6}$ .

Now, suppose that  $n \equiv 1 \pmod{6}$  or  $n \equiv 5 \pmod{6}$ . Let  $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  be the integral matrix such that  $\text{Tr} M = \det M = 1$ . It is easy to see that this condition is equivalent to that the matrix  $M$  has eigenvalues:  $\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \beta = \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ . Put  $A = M^x, B = M^y, C = I^z$ . Then by the condition  $\det M = 1$  follows  $\det A = \det B = \det C = 1$  so the matrices  $A, B, C \in SL_2(\mathbf{Z})$ . On the other hand since  $\alpha \neq \beta$  then the matrix  $M$  is diagonalizable over the complex field. Hence there is a nonsingular matrix  $P$  such that  $M = PDP^{-1}$ , where  $D = \text{diag}\{\alpha, \beta\}$ . By induction it follows that for every natural number  $k$  we have

$$M^k = PD^k P^{-1} = P \text{diag}\{\alpha^k, \beta^k\} P^{-1}. \quad (19)$$

Using (19) we obtain that equation (6) is equivalent to

$$\alpha^{nx} + \alpha^{ny} = 1, \quad \beta^{nx} + \beta^{ny} = 1. \quad (20)$$

Since  $\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  then  $\alpha^2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} = \epsilon_1$ , where  $\epsilon_1$  is the root of unity of degree 3. Similarly we obtain that  $\beta^2 = \left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \epsilon_2 = \bar{\epsilon}_1$ .

On the other hand we observe that if  $\epsilon$  is the root of unity of degree 3 then we have

$$\alpha^m = \begin{cases} 1, & \text{if } m = 6k, \\ -\epsilon^2, & \text{if } m = 6k + 1, \\ \epsilon, & \text{if } m = 6k + 2, \\ -1, & \text{if } m = 6k + 3, \\ \epsilon^2, & \text{if } m = 6k + 4, \\ -\epsilon, & \text{if } m = 6k + 5. \end{cases} \quad (21)$$

where in (21)  $\epsilon = \epsilon_1$  when  $\alpha = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$  and  $\alpha$  is replaced by  $\beta$  and  $\epsilon = \epsilon_2$  in other case.

Let  $n \equiv 1 \pmod{6}$ . Then we take  $x \equiv 1 \pmod{6}$  and  $y \equiv 5 \pmod{6}$  or  $x \equiv 5 \pmod{6}$  and  $y \equiv 1 \pmod{6}$ . Hence we have  $nx \equiv 1 \pmod{6}$  and  $ny \equiv 5 \pmod{6}$  or  $nx \equiv 5 \pmod{6}$  and  $ny \equiv 1 \pmod{6}$ . From (21) it follows that in these cases we have

$$\alpha^{nx} + \alpha^{ny} = -\epsilon^2 - \epsilon = 1,$$

because  $\epsilon^2 + \epsilon + 1 = 0$ . In similar way we obtain

$$\beta^{nx} + \beta^{ny} = 1.$$

Hence equation (6) has a solution in elements  $A, B, C \in SL_2(\mathbf{Z})$  if  $n \equiv 1 \pmod{6}$ .

Let us suppose that  $n \equiv 5 \pmod{6}$ . Taking  $x \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $y \equiv 5 \pmod{6}$  or  $x \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $y \equiv 1 \pmod{6}$  we obtain  $nx \equiv 5 \pmod{6}$ ,  $ny \equiv 1 \pmod{6}$  or  $nx \equiv 1 \pmod{6}$ ,  $ny \equiv 5 \pmod{6}$ . Hence, we see that we have the same case as in the previous consideration. The proof of Theorem 1 is complete.

### 3. Proof of Theorem 2

Let  $X, Y, Z \in G_2(k, \Delta)$  and let

$$X = \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ ks_1 & r_1 \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ ks_2 & r_2 \end{pmatrix}, \quad Z = \begin{pmatrix} r_3 & s_3 \\ ks_3 & r_3 \end{pmatrix}.$$

Then we have  $Z^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} r_3 & -s_3 \\ -ks_3 & r_3 \end{pmatrix}$ . Suppose that for some natural number  $n \geq 2$  we have  $X^n + Y^n = Z^n$ . Then multiplying the last equation by  $Z^{-n}$  we get

$$(XZ^{-1})^n + (YZ^{-1})^n = I, \quad (22)$$

because  $XZ^{-1} = Z^{-1}X$  and  $YZ^{-1} = Z^{-1}Y$ . On the other hand we have

$$\begin{aligned} XZ^{-1} &= \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ ks_1 & r_1 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} r_3 & -s_3 \\ -ks_3 & r_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} r_1r_3 - ks_1s_3 & s_1r_3 - r_1s_3 \\ k(s_1r_3 - r_1s_3) & r_1r_3 - ks_1s_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} R & S \\ kS & R \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} A \end{aligned} \quad (23)$$

and

$$\begin{aligned} YZ^{-1} &= \begin{pmatrix} r_2 & s_2 \\ ks_2 & r_2 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} r_3 & -s_3 \\ -ks_3 & r_3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} r_2r_3 - ks_2s_3 & s_2r_3 - r_2s_3 \\ k(s_2r_3 - r_2s_3) & r_2r_3 - ks_2s_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} M & N \\ kN & M \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} B. \end{aligned} \quad (24)$$

From (22)–(24) we obtain

$$A^n + B^n = \Delta^n I = \begin{pmatrix} \Delta^n & 0 \\ 0 & \Delta^n \end{pmatrix}. \quad (25)$$

On the other hand we have

$$A^n = \begin{pmatrix} R & S \\ kS & R \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} R_n & S_n \\ kS_n & R_n \end{pmatrix}, B^n = \begin{pmatrix} M & N \\ kN & M \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} M_n & N_n \\ kN_n & M_n \end{pmatrix}. \quad (26)$$

From (25) and (26) we obtain

$$R_n + M_n = \Delta^n, S_n + N_n = 0 \quad (27)$$

because  $k > 0$ . It is easy to check that

$$\det A = \det \begin{pmatrix} R & S \\ kS & R \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} r_1 & s_1 \\ ks_1 & r_1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} r_3 & -s_3 \\ -ks_3 & r_3 \end{pmatrix} = \Delta^2.$$

Similarly we get  $\det B = \Delta^2$ . Hence by Cauchy's theorem it follows that

$$\det A^n = (\det A)^n = \Delta^{2n}, \quad \det B^n = (\det B)^n = \Delta^{2n}. \quad (28)$$

From (26) we have

$$\det A^n = R_n^2 - kS_n^2, \quad \det B^n = M_n^2 - kN_n^2. \quad (29)$$

By (28) and (29) it follows that

$$R_n^2 - M_n^2 = k(S_n^2 - N_n^2) = k(S_n - N_n)(S_n + N_n). \quad (30)$$

But from (27) we have  $S_n + N_n = 0$  and therefore by (30) it follows that

$$R_n^2 - M_n^2 = (R_n - M_n)(R_n + M_n) = 0. \quad (31)$$

Since by (27)  $R_n + M_n = \Delta^n \neq 0$ , then from (31) we obtain that  $R_n = M_n$  so  $2R_n = \Delta^n$ . From (28), (29) and the last equality we get

$$3\Delta^{2n} = -k(2S_n)^2 \quad (32)$$

and we see that (32) is impossible, because  $\Delta \neq 0$  and  $k > 0$ .

The proof of Theorem 2 is complete.

**Remark.** Let  $K = Q(\sqrt{k})$  be quadratic number field with  $k > 0$  and  $k \equiv 2, 3 \pmod{4}$ . Then it is well-known that every integer element  $\alpha$  in such field has the form:  $\alpha = r + s\sqrt{k}$ , where  $r, s \in \mathbf{Z}$ . Denote by  $R_K$  the ring of integer elements of this field  $K$  and by  $G_2(k)$  the set of matrices of the form:

$$G_2(k) = \left\{ \begin{pmatrix} r & s \\ ks & r \end{pmatrix}; r, s \in \mathbf{Z}, 0 < k \in \mathbf{Z}, k \equiv 2, 3 \pmod{4} \right\}.$$

It is easy to see that the mapping  $\Phi : G_2(k) \rightarrow R_K$  defined by the formula

$$\Phi \left( \begin{pmatrix} r & s \\ ks & r \end{pmatrix} \right) = r + s\sqrt{k}$$

is an isomorphism. Hence from Theorem 2 we obtain the following:

**Corollary.** *The Fermat's equation  $\alpha^n + \beta^n = \gamma^n$ ,  $n \geq 2$  has no solutions in elements  $\alpha, \beta, \gamma \in R_K$  with the same norm, i.e. if  $N(\alpha) = N(\beta) = N(\gamma) = \Delta$ .*

## References

- [1] BIALEK, K. AND GRYTCZUK, A., The equation of Fermat in  $G_2(k)$  and  $Q(\sqrt{k})$ , *Acta Acad. Paed. Agriensis-Sectio Mat. Eger.*, **13** (1987), 81–90.
- [2] CAO, Z. AND GRYTCZUK, A., Fermat's type equation in the set of  $2 \times 2$  integral matrices, *Tsukuba J. Math.*, **22** (1998), 637–643.
- [3] DOMIATY, R., Solution of  $x^4 + y^4 = z^4$  in  $2 \times 2$  integral matrices, *Amer. Math. Monthly*, **73** (1966), 631.
- [4] KHAZANOV, A., Fermat's equation in matrices, *Serdica Math. J.*, **21** (1995), 19–40.
- [5] RIBENBOIM, P., 13 Lectures on Fermat's Last Theorem, Springer Verlag, 1979.
- [6] ROTKIEWICZ, A., Applications of Jacobi's symbol to Lehmer's numbers, *Acta Arith.*, **42** (1983), 163–187.

- [7] TAYLOR, R. AND WILES, A., Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras, *Annals of Math.*, **141** (1995), 553–572.
- [8] WILES, A., Modular elliptic curves and Fermat’s Last Theorem, *Annals of Math.*, **141** (1995), 443–551.

**Zhenfu Cao**

Department of Mathematics  
Harbin Institute of Technology  
Harbin 150001  
P. R. China  
e-mail: zfcdo@hope.hit.edu.cn

**Aleksander Grytczuk**

Institute of Mathematics  
Department of Algebra and Number Theory  
T. Kotarbiński Pedagogical University  
65-069 Zielona Góra, Poland



## A NOTE ON THE LOCATION OF ZEROS OF POLYNOMIALS DEFINED BY LINEAR RECURSIONS

Ferenc Mátyás (Eger, Hungary)

**Abstract.** In this paper it is proved that some earlier results on the location of zeros of polynomials defined by special linear recursions can be improved if the Brauer's theorem is applied instead of the Gershgorin's theorem.

**AMS Classification Number:** 11B39, 12D10

### 1. Introduction

Let  $n \geq 2$  an integer and define the polynomials  $G_n(x)$  by the recursive formula

$$(1) \quad G_n(x) = P(x)G_{n-1}(x) + Q(x)G_{n-2}(x),$$

where the polynomials  $P(x), Q(x), G_0(x)$  and  $G_1(x)$  are fixed polynomials from  $\mathbf{C}[x]$  and at most  $G_0(x)$  is the zeropolynomial. If it is needed then we use the notation

$$(2) \quad G_n(P(x), Q(x), G_0(x), G_1(x))$$

instead of  $G_n(x)$ . Thus, for example the wellknown Fibonacci ( $F_n(x)$ ) and Chebyshev ( $U_n(x)$ ) polynomials of the second kind can be obtained as

$$F_n(x) = G_n(x, 1, 0, 1) \quad \text{and} \quad U_n(x) = G_n(2x, -1, 0, 1),$$

respectively.

Recently, we have dealt with the location of zeros of polynomials defined by (1), where the polynomials  $P(x), Q(x), G_0(x)$  and  $G_1(x)$  are special ones (see [3], [4], [5]). If the explicit values of the zeros of polynomials  $G_n(x)$  are unknown then one can try to determine such a subset of  $\mathbf{C}$  that contains the zeros of  $G_n(x)$  for all  $n \geq 1$ . For example, P. E. Ricci [7] proved that if a complex number  $z$  is a zero of the polynomial  $G_n(x, 1, 1, x+1)$  for some  $n \geq 1$  then  $|z| < 2$ . In [3] we investigated

the location of zeros of polynomials  $G_n(x, 1, c, x + e)$  if  $c \neq 0$ , and proved that if  $z \in \mathbf{C}$  is a zero of these polynomials for some  $n \geq 1$  then

$$(3) \quad |z| \leq \max(|e| + |c|, 2).$$

Similar result was obtained in [5] and for special recursions of order  $k \geq 2$  in [4].

To give the location of the zeros of the abovementioned polynomials we applied the wellknown Gershgorin's theorem. But, some papers written by J. Gilewicz and E. Leopold ([1], [2]) suggest that it would be better to apply the Brauer's theorem, since the results are sharper ones. First, see these theorems.

Let  $A = (a_{ij})$  be a quadratic matrix of order  $n \geq 2$  and  $a_{ij} \in \mathbf{C}$ . For  $1 \leq i \leq n$  let

$$(4) \quad \mathcal{G}_i = \left\{ \omega \in \mathbf{C} : |\omega - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq i}}^n |a_{it}| \right\}$$

and for  $1 \leq i < j \leq n$

$$(5) \quad \mathcal{B}_{ij} = \left\{ \omega \in \mathbf{C} : |\omega - a_{ii}| \cdot |\omega - a_{jj}| \leq \left( \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq i}}^n |a_{it}| \right) \left( \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq j}}^n |a_{jt}| \right) \right\}.$$

**Gershgorin's theorem.** *All the eigenvalues of  $A$  are contained in the set*

$$\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^n \mathcal{G}_i.$$

**Brauer's theorem.** *All the eigenvalues of  $A$  are contained in the set*

$$\mathcal{B} = \bigcup_{1 \leq i < j \leq n} \mathcal{B}_{ij}$$

(see [6]).

The purpose of this paper is to obtain a general theorem for the location of the zeros of polynomials defined by (1). Applying the Brauer's theorem we improve the result given in (3).

## 2. Results

First we need the following lemma.

**Lemma.** For every  $n \geq 1$

$$G_n(P(x), Q(x), G_0(x), G_1(x)) = \det(A_n),$$

where  $A_n$  is the following tridiagonal Jacobi matrix of order  $n$ :

$$A_n = \begin{pmatrix} G_1(x) & i\sqrt{Q(x)}G_0(x) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ i\sqrt{Q(x)} & P(x) & i\sqrt{Q(x)} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{Q(x)} & P(x) & i\sqrt{Q(x)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & i\sqrt{Q(x)} & P(x) \end{pmatrix}.$$

**Proof.** The statement of the Lemma can be obtained by induction on  $n$ .

**Theorem.** For  $n \geq 2$  all the zeros of the polynomials

$$G_n(P(x), Q(x), G_0(x), G_1(x))$$

are located in the sets defined by

$$(6) \quad \left\{ z \in \mathbf{C} : |G_1(z)| \leq \left| \sqrt{Q(z)}G_0(z) \right| \right\} \cup \left\{ z \in \mathbf{C} : |P(z)| \leq 2 \left| \sqrt{Q(z)} \right| \right\}$$

or

$$(7) \quad \left\{ z \in \mathbf{C} : |G_1(z)P(z)| \leq 2|Q(z)G_0(z)| \right\} \cup \left\{ z \in \mathbf{C} : |P(z)| \leq 2 \left| \sqrt{Q(z)} \right| \right\}.$$

**Proof.** It is known that the eigenvalues  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  of  $A_n$  are the roots of the equation  $\det(\lambda I_n - A_n) = 0$ , which can be rewritten as

$$\lambda^n + a_{n-1}(x)\lambda^{n-1} + a_{n-2}(x)\lambda^{n-2} + \dots + a_1(x)\lambda + \det(A_n) = 0,$$

where  $I_n$  is the unit matrix of order  $n$  and the coefficients  $a_i(x)$  of  $\lambda^i$ -s depend on  $x$ . Thus for  $n \geq 2$ , by our Lemma, a complex number  $z$  is a zero of the polynomial

$$G_n(P(x), Q(x), G_0(x), G_1(x))$$

iff 0 is an eigenvalue of the tridiagonal matrix  $A_n$ . Applying the Gershgorin's theorem and (4) we get that

$$|G_1(z)| \leq \left| \sqrt{Q(z)} G_0(z) \right| \quad \text{or} \quad |P(z)| \leq 2 \left| \sqrt{Q(z)} \right|,$$

while according to the Brauer's theorem and (5)

$$|G_1(z)P(z)| \leq 2|Q(z)G_0(z)| \quad \text{or} \quad |P(z)| \leq 2 \left| \sqrt{Q(z)} \right|.$$

These prove the theorem.

We note that for  $n \geq 1$

$$G_n(P(x), Q(x), 0, G_1(x)) = G_1(x) \cdot G_n(P(x), Q(x), 0, 1) =$$

$$G_1(x) \cdot G_{n-1}(P(x), Q(x), 1, P(x)),$$

thus if  $z$  is a zero of the polynomial  $G_n(P(x), Q(x), 0, G_1(x))$  then either  $G_1(z) = 0$  or  $z$  is a zero of the polynomial  $G_{n-1}(P(x), Q(x), 1, P(x))$ . In the latter case, by our theorem,  $z$  satisfies the inequality

$$|P(z)| \leq 2 \left| \sqrt{Q(z)} \right|,$$

which matches with a direct consequence of Theorem 1 in [5].

### 3. Application

In the following part of this paper we shall apply our theorem to give the location of zeros of polynomials  $G_n(x, 1, c, x + e)$ , where  $c, e \in \mathbf{C}$  and  $c \neq 0$ , since a large class of polynomials  $G_n(x)$  can be traced back to this form (see [5]). We have already mentioned that the result (3) can be obtained by the Gershgorin's theorem, thus we demonstrate that the Brauer's theorem (or (7)) gives in general a better estimation for the location of the zeros.

For  $n \geq 2$ , according to (7), the zeros  $z$  of  $G_n(x, 1, c, x + e)$  belong to the set

$$(8) \quad \{z \in \mathbf{C} : |z + e| \cdot |z| \leq 2|c|\} \cup \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 2\},$$

while by (6), they belong to the set

$$(9) \quad \{z \in \mathbf{C} : |z + e| \leq |c|\} \cup \{z \in \mathbf{C} : |z| \leq 2\},$$

from which (3) immediately follows. It can be seen that the zero of  $G_1(x) = x + e$  also belongs to the sets (8) and (9), further if a complex number  $z$  satisfies (8) then

$z$  also satisfies (9). Therefore, the set defined by (8) can be a narrower one than the set defined by (9).

Let  $|e| + |c| \leq 2$ . In this case the sets (8) and (9) are equals. Thus (3) cannot be improved, that is,  $|z| \leq 2$ .

Let  $|e| + |c| > 2$ . Applying the mapping  $\mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{C}$  defined by

$$z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi) \mapsto z' = |z|(\cos(\varphi - \arg(-e)) + i \sin(\varphi - \arg(-e))),$$

the sets (8) and (9) are transformed into the sets

$$(10) \quad \{z' \in \mathbf{C} : |z' - |e|| \cdot |z'| \leq 2|c|\} \cup \{z' \in \mathbf{C} : |z'| \leq 2\}$$

and

$$(11) \quad \{z' \in \mathbf{C} : |z' - |e|| \leq |c|\} \cup \{z' \in \mathbf{C} : |z'| \leq 2\},$$

respectively. Without loss of generality it is sufficient to deal with only (10) and (11) since we want to estimate  $|z| = |z'|$ . Let  $z' = x + iy$ , where  $x, y \in \mathbf{R}$ . Then (10) and (11) can be rewritten as

$$(12) \quad ((x - |e|)^2 + y^2) (x^2 + y^2) \leq 4|c|^2 \quad \text{or} \quad x^2 + y^2 \leq 4$$

and

$$(x - |e|)^2 + y^2 \leq |c|^2 \quad \text{or} \quad x^2 + y^2 \leq 4,$$

respectively. Investigating the graph of the implicit function

$$((x - |e|)^2 + y^2) (x^2 + y^2) - 4|c|^2 = 0,$$

one can calculate that the graph always intersects the axis  $x$  in

$$(13) \quad x_1 = \frac{|e| - \sqrt{|e|^2 + 8|c|}}{2} \quad \text{and} \quad x_2 = \frac{|e| + \sqrt{|e|^2 + 8|c|}}{2},$$

while in the case  $|e|^2 \geq 8|c|$  the points

$$(14) \quad x_3 = \frac{|e| - \sqrt{|e|^2 - 8|c|}}{2} \quad \text{and} \quad x_4 = \frac{|e| + \sqrt{|e|^2 - 8|c|}}{2}$$

are also intersecting points, and the inequalities

$$0 < -x_1 < x_3 \leq x_4 < x_2$$

hold. Further, if  $z' = x + iy$  satisfies (12) and  $|e|^2 \leq 8|c|$  then

$$(15) \quad |z| = |z'| \leq x_2 < \max(|e| + |c|, 2) = |e| + |c|,$$

while in the case  $|e|^2 > 8|c|$

$$(16) \quad |z| = |z'| \leq \max(2, x_3) \quad \text{or} \quad x_4 \leq |z| = |z'| \leq x_2 < |e| + |c|,$$

where  $x_1, x_2, x_3$  and  $x_4$  are defined by (13) and (14). It can be seen that (15) and (16) really improve (3). (The numerical calculations are omitted in (13)–(16).)

## References

- [1] GILEWICZ, J. & LEOPOLD, E., Location of the zeros of polynomials satisfying three-terms recurrence relation with complex coefficients, *Integral Transforms and Special Functions*, **2** (1994), 267–278.
- [2] GILEWICZ, J. & LEOPOLD, E., Zeros of polynomials and recurrence relation with periodic coefficients, *Journal of Computational and Applied Math.*, **107** (1999), 241–255.
- [3] MÁTYÁS, F., Bound for the zeros of Fibonacci type polynomials, *Acta Acad. Paed. Agriensis Sectio Math.*, **25** (1998), 17–23.
- [4] MÁTYÁS, F., On a bound of the zeros of polynomials defined by special linear recurrences of order  $k$ , *Rivista di Mat. Univ. Parma*, **6/1** (1998), 173–180.
- [5] MÁTYÁS, F., On the location of the zeros of polynomials defined by linear recursions, *Publ. Math. Debrecen*, **55/3–4** (1999), 453–464.
- [6] PARODI, M., La localisation des valeurs caractéristiques des matrices et ses applications, Gauthier Villars, Paris, 1959.
- [7] RICCI, P. E., Generalized Lucas polynomials and Fibonacci polynomials, *Rivista di Mat. Univ. Parma*, **4/5** (1995), 137–146.

## Ferenc Mátyás

Institute of Mathematics and Informatics

Eszterházy Károly College

Leányka str. 4.

H-3300 Eger, Hungary

e-mail: matyas@ektf.hu

## CONVERGENCE OF HOMOGENEOUS MATRIX-VALUED $\Lambda$ -MARTINGALES

Tibor Tórnács (Eger, Hungary)

**Abstract.** I. Fazekas in [3] studied the classical martingale convergence theorem of Doob for one-parameter  $\Lambda$ -martingales. The theme of this paper is similar but for two-parameters homogeneous  $\Lambda$ -martingales.

### 1. Preliminary result

Let  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  be a probability space in which  $(\xi_i; i = 1, 2, \dots)$  is a sequence of random variables. Let  $(\mathcal{F}_i; i = 1, 2, \dots)$  be a sequence of  $\sigma$ -subalgebras of  $\mathcal{F}$ . We call the process  $(\xi_i, \mathcal{F}_i)$   $i = 1, 2, \dots$  a linear martingale if  $\xi_i$  are  $\mathcal{F}_i$ -measurable and integrable for every  $i = 1, 2, \dots$  furthermore

$$\mathbb{E}(\xi_i \mid \mathcal{F}_{i-1}) = a_1(i)\xi_{i-1} + \dots + a_m(i)\xi_{i-m}$$

for every  $i > m$  integers where  $m$  is a fixed integer. This process satisfies equation  $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \Lambda(t)X_{t-1}$  for every  $t \geq m$  where

$$X_t = \begin{pmatrix} \xi_t \\ \vdots \\ \xi_{t-m+1} \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad \Lambda(t) = \begin{pmatrix} a_1(t) & \dots & a_m(t) \\ 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Generalized we call an  $m$ -dimensional process  $(X_t, \mathcal{F}_t)$   $t = 1, 2, \dots$   $\Lambda$ -martingale if  $X_t$  integrable,  $\Lambda(t)$  are given non-random matrices for every  $t$  positive integers and  $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_{t-1}) = \Lambda(t)X_{t-1}$  ( $t = 1, 2, \dots$ ). If  $\Lambda(t)$  does not depend on  $t$  then  $X_t$  is called a homogeneous martingale. Let  $\Delta_t = X_t - \Lambda(t)X_{t-1}$ ,  $A(s, s) = I$  the identity matrix and

$$A(t, s) = \Lambda(t)A(t-1, s)$$

for every  $t > s$  furthermore we assume that the limit  $A(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t, s)$  exists

for every  $s = 1, 2, \dots$ . Let  $Y_t = \sum_{s=1}^t A(s)\Delta_s$  which is called the accompanying martingale of  $X_t$ . I. Fazekas proved in [3] the following theorem:

If  $\|A(t, s) - A(s)\| \leq c_{t-s}$  ( $t \geq s$ ),  $\sum_{n=0}^{\infty} c_n < \infty$ , there exists a positive function  $f(\omega)$  for which  $f(\omega)\|\Delta_s(\omega)\| \leq \|A(s)\Delta_s(\omega)\|$  for every  $s \geq 1$  and  $\omega \in \Omega$  and

$\sup_t \mathbb{E} \|X_t\| < \infty$  then  $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X_\infty$  almost surely. ( $\|\cdot\|$  denotes the norm of matrix.) In this paper this result is extended to two-parameter version.

## 2. Main result

Let  $\mathbb{N}$  denote the set of positive integers and let  $m$  be a fixed positive integer. Let  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  be a probability space in which  $(\xi_{ij}: i, j \in \mathbb{N})$  is a sequence of real-valued random variables. Let  $(\mathcal{F}_{ij}: i, j \in \mathbb{N})$  be a sequence of  $\sigma$ -subalgebras of  $\mathcal{F}$  which satisfies the so-called condition (F4) introduced by Cairoli and Walsh [2]:

$$\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_{ij}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_{i\infty}) \mid \mathcal{F}_{\infty j}) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_{\infty j}) \mid \mathcal{F}_{i\infty}), \quad (\text{F4})$$

for every  $i, j \in \mathbb{N}$  where  $\mathcal{F}_{i\infty} = \sigma\{\mathcal{F}_{ij}: j \in \mathbb{N}\}$  and  $\mathcal{F}_{\infty j} = \sigma\{\mathcal{F}_{ij}: i \in \mathbb{N}\}$  ( $\sigma\{\cdot\}$  means generated  $\sigma$ -algebra).

In order to study a convergence property of  $\xi_{ij}$  we introduce the following matrix:

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} \xi_{i,j-m+1} & \cdots & \xi_{i,j} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_{i-m+1,j-m+1} & \cdots & \xi_{i-m+1,j} \end{pmatrix}$$

**Definition 1.** Let  $\Lambda_{kl}$  be given non-random real matrices (their types are  $m \times m$ ). Suppose that  $\Lambda_{0,0} = I$  (the identity matrix),

$$\Lambda_{ij}\Lambda_{kl} = \Lambda_{i+k,j+l} \quad \forall i, j, k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (1)$$

$X_{ij}$  is  $\mathcal{F}_{ij}$ -measurable and integrable for every  $i, j \in \mathbb{N}$ . If

$$\mathbb{E}(X_{i+k,j+l} \mid \mathcal{F}_{ij}) = \Lambda_{kl} X_{ij}$$

for every  $k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  and  $i, j > m$  integers then the process  $(X_{ij}, \mathcal{F}_{ij})$   $i, j \in \mathbb{N}$  is called a homogeneous matrix-valued  $\Lambda$ -martingale.

Let us introduce the martingale difference

$$\begin{aligned} \Delta_{ij} &= X_{ij} - \mathbb{E}(X_{i,j} \mid \mathcal{F}_{i-1,j}) - \mathbb{E}(X_{i,j} \mid \mathcal{F}_{i,j-1}) + \mathbb{E}(X_{i,j} \mid \mathcal{F}_{i-1,j-1}) \\ &= X_{ij} - \Lambda_{1,0} X_{i-1,j} - \Lambda_{0,1} X_{i,j-1} + \Lambda_{1,1} X_{i-1,j-1} \end{aligned}$$

for  $i, j > 1$  integers,  $\Delta_{1,1} = X_{1,1}$ ,  $\Delta_{i,1} = X_{i,1} - \Lambda_{1,0} X_{i-1,1}$  for  $i > 1$  integers and  $\Delta_{1,j} = X_{1,j} - \Lambda_{0,1} X_{1,j-1}$  for  $j > 1$  integers.

**Lemma 1.** *With the previous notations and conditions  $X_{ij} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \Lambda_{i-k,j-l} \Delta_{k,l}$  for every  $i, j \in \mathbb{N}$ .*



**Proof.** Using (1) we have this lemma by induction.

**Definition 2.** We assume that  $\Lambda_{kl}$  is convergent and  $\Lambda = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} \Lambda_{kl}$ . Then

$$Y_{ij} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \Lambda \Delta_{k,l}$$

is called the accompanying martingale of  $X_{ij}$ .

**Lemma 2.** If  $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  is a convex non-decreasing function and

$$\sup_{i,j} \mathbb{E}f(\|X_{ij}\|) < c < \infty$$

then  $\sup_{i,j} \mathbb{E}f(\|Y_{ij}\|) < c$  as well. (In this paper  $\|\cdot\|$  denotes the norm of a matrix.)

**Proof.** Let  $r, s$  be fixed integers,  $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$  and

$$Y_{ij}^{(rs)} = \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \Lambda_{r-k, s-l} \Delta_{k,l}.$$

Then it is easy to see that  $(f(\|Y_{ij}^{(rs)}\|), \mathcal{F}_{ij})$   $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$  is a real submartingale, so we get by Lemma 1

$$\mathbb{E}f(\|Y_{ij}^{(rs)}\|) \leq \mathbb{E}f(\|Y_{rs}^{(rs)}\|) = \mathbb{E}f(\|X_{rs}\|) < c$$

for every  $1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s$  integers. On the other hand  $\lim_{\substack{r \rightarrow \infty \\ s \rightarrow \infty}} Y_{ij}^{(rs)} = Y_{ij}$  thus by Fatou's lemma we have Lemma 2.

**Theorem.** Let the process  $(X_{ij}, \mathcal{F}_{ij})$   $i, j \in \mathbb{N}$  is a homogeneous matrix-valued  $\Lambda$ -martingale which satisfies (F4). Let us suppose that  $\Lambda_{kl}$  is convergent,  $\Lambda = \lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ l \rightarrow \infty}} \Lambda_{kl}$  and there exist constants  $c_{kl}$  such that

$$\|\Lambda_{kl} - \Lambda\| < c_{kl} \quad \text{and} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} c_{kl} < \infty \quad (2)$$

for every  $k, l \in \mathbb{N}$ . If

$$\|\Delta_{kl}\| \leq q^{k+l} \quad (3)$$

for every  $k, l \in \mathbb{N}$  where  $0 < q < 1$  is a fixed real number and

$$\sup_{k,l} \mathbb{E} \left( \|X_{kl}\| \log^+(\|X_{kl}\|) \right) < \infty \quad (4)$$

then  $X_{ij}$  converges almost surely.

**Proof.** We get by Lemma 1 and (2)

$$\begin{aligned} \|X_{ij} - Y_{ij}\| &= \left\| \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j (\Lambda_{i-k, j-l} \Delta_{kl} - \Lambda \Delta_{kl}) \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j \|\Lambda_{i-k, j-l} - \Lambda\| \cdot \|\Delta_{kl}\| \leq \sum_{k=1}^i \sum_{l=1}^j c_{i-k, j-l} \|\Delta_{kl}\|. \end{aligned}$$

Let  $r = i - k$  and  $s = j - l$  thus we have by (3)

$$\begin{aligned} \|X_{ij} - Y_{ij}\| &= \sum_{r=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{j-1} c_{rs} \|\Delta_{i-r, j-s}\| \leq \sum_{r=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{j-1} c_{rs} q^{i-r+j-s} = \\ &= \frac{1}{q^{-(i+j)}} \sum_{r=0}^{i-1} \sum_{s=0}^{j-1} c_{rs} q^{-(r+s)} \end{aligned}$$

So we get by Kronecker's lemma (see it for example [4]) that  $\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ j \rightarrow \infty}} \|X_{ij} - Y_{ij}\| = 0$ .

By (4), Lemma 2 and Cairoli's theorem (see in [1]) there exists  $\lim_{\substack{i \rightarrow \infty \\ j \rightarrow \infty}} Y_{ij}$  thus the

Theorem is proved.

## References

- [1] R. CAIROLI, Une inegalite pour maringales a indices multiples et ses applications, *Seminaire de Probabilities IV, Universite de Strasbourg, Lecture Notes in Math.* **Vol. 124**, (1970), 1–27, Springer-Verlag, Berlin.
- [2] R. CAIROLI AND J. B. WALSH, Stochastic integrals in the plane, *Acta Math. Hung.*, **134** (1975), 111–183.
- [3] I. FAZEKAS, On the convergence of linear martingales, *Publ. Math. Debrecen*, **34** (1987), 99–104.
- [4] I. FAZEKAS AND T. TÓMÁCS, Strong laws of large numbers for pairwise independent random variables with multidimensional indices, *Publ. Math. Debrecen*, **53/1–2** (1998), 149–161.

**Tibor Tómacs**

Institute of Mathematics and Informatics

Eszterházy Károly College

Leányka str. 4.

H-3300 Eger, Hungary

e-mail: tomacs@ektf.hu

## INVESTIGATION OF A DISCRETE CYCLIC-WAITING PROBLEM BY SIMULATION

Gábor Farkas, Péter Kárász (Budapest, Hungary)

**Abstract.** The paper investigates a discrete cyclic-waiting queueing model, introduced by L. Lakatos in [6,7] and describing the landing of airplanes, by means of simulation. The interarrival and service time distributions are geometrical, the service discipline FIFO. The simulation results show a fast convergence to the analytical ones.

### 1. Introduction

Queueing systems with customers arriving, after a while getting service then leaving the system often occur in real life. These phenomena constitute a special field of probability theory. Depending on the inter-arrival and service time distributions, the number of servers and service discipline lead to different mathematical problems and form an important area of applied mathematics, the theory of queues.

For the investigation of queueing systems one has two possibilities. If the system under consideration is simple enough, then it allows a mathematical description, and one can construct a model which may be examined by exact analytical methods. If the system is too complex or its features are too specific, there remains the method of simulation. In the investigation of real systems by simulation the verification and validation play an essential role. One way is to use a -possibly simpler- analytical model for which we can obtain exact results, and to compare its characteristics with the simulation one. The parallel use of analytical and simulation methods usually gives enough information about the behaviour of such systems.

In conventional queueing systems the service process runs continuously, after having completed the service of a customer, we immediately take the next one. In this paper we consider a model describing the landing of airplanes. Our system is different from the above ones, the starting moment of service is determined by the moment of the completion of previous service and the moment of the arrival of the actual customer. There appears an idle time which is necessary to get to the starting position for service. We regard this idle time as part of the service time making in such a way the service process continuous. Such systems were analytically investigated in the case of Poisson arrivals and exponentially distributed service time in [4], uniform service time in [5], and for discrete time case in [6,7]. In [1] we

already compared the analytical results with data obtained by means of simulation with continuous cases, and here we do this for discrete distributions.

## 2. Formulation of our problem

First, let us describe the focus of investigation. There is an airport where the entering airplanes put a landing request to the control tower upon arrival in the airside. Provided there is free system, i.e. the entering entity can be serviced at the moment of the request, the airplane can start landing. However, if the server is busy, i.e. a formerly arrived plane has not accomplished landing yet or other planes are already queueing for being serviced, then the incoming plane starts to circular manoeuvre. The radius of the circle is fixed in a way that it takes the airplane  $T$  time to be above the runway again, i.e. the airplane can only put further landing request to the control tower at every  $nT$  moment after arrival, where  $n \in \mathbf{N}$ . Naturally, the request can only be serviced if there is no airplane queueing before it. The reception and service of the incoming planes follow the FIFO rule, according to which the earlier arriving planes are given landing permission earlier. Obviously, this system only operates properly if there are not many planes cyclic queueing.

## 3. Theoretical results

The above described problem has been investigated by L. Lakatos in several papers. Here we shortly formulate his results to which we compare our data obtained by means of simulation.

Let us consider a queueing system in which the time between two arriving requests has geometrical distribution with parameter  $r$ , the service time with parameter  $1 - q$ , and the service of a request can be started only at the moment of its arrival or at moments differing from it by the multiples of cycle time  $T$  according to the FIFO rule. The described system will be investigated by means of the embedded Markov chain technique (see e.g. [2]). Let us define an embedded Markov chain whose states correspond to the number of requests in the system at moments just before starting the service of a request  $t_k - 0$  (where  $t_k$  is the moment of the beginning of the service of the  $k$ -th one). The matrix of transition probabilities for this chain has the form

$$\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ 0 & b_0 & b_1 & b_2 & \cdots \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

whose elements are determined by the generating functions:

$$\begin{aligned}
 A(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i = \frac{(1-r)(1-q)}{1-q(1-r)} + \\
 &\quad + z \frac{r(1-q)}{1-q(1-r)} + z \frac{rq(1-q^T)(1-r+rz)^T}{[1-q(1-r)][1-q^T(1-r+rz)^T]}, \\
 B(z) &= \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i = \frac{1-(1-r)^T(1-r+rz)^T}{1-(1-r)(1-r+rz)} \frac{r(1-r+rz)}{1-(1-r)^T} + \\
 &\quad + \frac{1-q^T(1-r)^T(1-r+rz)^T}{1-q(1-r)(1-r+rz)} \frac{rq(1-r+rz)[(1-r+rz)^T-1]}{[1-(1-r)^T][1-q^T(1-r+rz)^T]}.
 \end{aligned}$$

The generating function of ergodic distribution  $P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$  for this chain has the form

$$P(z) = p_0 \frac{zA(z) - B(z) + \frac{rz}{(1-r)(1-q)}[A(z) - B(z)]}{z - B(z)},$$

where

$$p_0 = \frac{(1-r)(1-q)}{1-q(1-r)} - \frac{rq[1-(1-r)^T]}{(1-r)^{T-1}(1-q^T)[1-q(1-r)]}.$$

The condition of the existence of ergodic distribution is the fulfilment of inequality

$$\frac{rq}{1-q^T} \frac{1-q^T(1-r)^T}{1-q(1-r)} < (1-r)^T.$$

In order to prove whether the analytical results hold true in practice, we have produced a computerized model of the system which provides random data. In what follows we compare the theoretical results with the generated data.

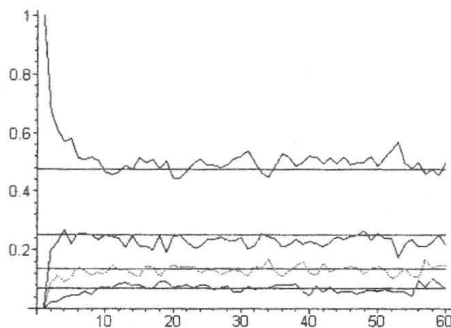
#### 4. Computed results

We carried out the experiments with different  $r, q$  and  $T$  values. For every fixed  $T, r, q$ , we did 500 independent experiments with different computer generated arrival and service times. On the basis of the above, we examined the probabilities in free systems of having  $0, 1, 2 \dots$  airplanes (marked  $p_0, p_1, p_2 \dots$  respectively) in the queue at the starting moments of services. In every case we recorded the results in a table where  $p_0, p_1, p_2 \dots$  are given in columns, and rows show the number of the incoming airplanes. All values are given in minutes.

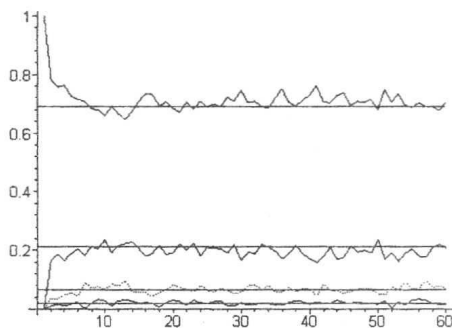
For lack of place, we only include one table here: Figure 1 indicating those arriving and service times, where  $r = 0.03$ ,  $q = 0.9$  and  $T = 6$ .

|     | <i>p0</i> | <i>p1</i> | <i>p2</i> | <i>p3</i> | <i>p4</i> | <i>p5</i> | <i>p6</i> | <i>p7</i> | <i>p8</i> | <i>p9</i> | <i>p10</i> | <i>p11</i> | <i>p12</i> | <i>p13</i> | <i>p14</i> | <i>p15</i> | <i>p16</i> | <i>p17</i> |
|-----|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1.  | 1.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 2.  | 0.780     | 0.157     | 0.046     | 0.011     | 0.003     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 3.  | 0.746     | 0.183     | 0.049     | 0.017     | 0.003     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 4.  | 0.754     | 0.157     | 0.063     | 0.017     | 0.003     | 0.000     | 0.003     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 5.  | 0.706     | 0.189     | 0.069     | 0.020     | 0.011     | 0.003     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 6.  | 0.683     | 0.217     | 0.063     | 0.029     | 0.003     | 0.000     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 7.  | 0.689     | 0.189     | 0.094     | 0.014     | 0.009     | 0.003     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 8.  | 0.663     | 0.214     | 0.083     | 0.029     | 0.009     | 0.000     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 9.  | 0.654     | 0.209     | 0.097     | 0.031     | 0.006     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 10. | 0.634     | 0.243     | 0.069     | 0.043     | 0.006     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 11. | 0.671     | 0.186     | 0.091     | 0.026     | 0.023     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 12. | 0.649     | 0.211     | 0.089     | 0.037     | 0.011     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 13. | 0.631     | 0.229     | 0.097     | 0.037     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 14. | 0.660     | 0.217     | 0.080     | 0.029     | 0.011     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 15. | 0.694     | 0.197     | 0.063     | 0.034     | 0.011     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 16. | 0.723     | 0.183     | 0.063     | 0.023     | 0.006     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 17. | 0.720     | 0.171     | 0.069     | 0.023     | 0.009     | 0.006     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 18. | 0.683     | 0.211     | 0.066     | 0.017     | 0.006     | 0.017     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 19. | 0.689     | 0.180     | 0.086     | 0.023     | 0.020     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 20. | 0.669     | 0.183     | 0.106     | 0.031     | 0.009     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 21. | 0.660     | 0.211     | 0.083     | 0.034     | 0.006     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 22. | 0.697     | 0.183     | 0.086     | 0.017     | 0.014     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 23. | 0.671     | 0.217     | 0.074     | 0.029     | 0.009     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 24. | 0.689     | 0.171     | 0.100     | 0.029     | 0.006     | 0.003     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 25. | 0.669     | 0.191     | 0.091     | 0.029     | 0.014     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 26. | 0.671     | 0.220     | 0.066     | 0.029     | 0.009     | 0.003     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 27. | 0.663     | 0.209     | 0.089     | 0.031     | 0.000     | 0.003     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 28. | 0.703     | 0.191     | 0.071     | 0.023     | 0.006     | 0.000     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 29. | 0.691     | 0.211     | 0.069     | 0.017     | 0.006     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 30. | 0.729     | 0.180     | 0.054     | 0.029     | 0.003     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 31. | 0.697     | 0.186     | 0.089     | 0.023     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 32. | 0.694     | 0.163     | 0.120     | 0.020     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 33. | 0.649     | 0.234     | 0.086     | 0.029     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 34. | 0.669     | 0.209     | 0.086     | 0.029     | 0.006     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 35. | 0.709     | 0.194     | 0.054     | 0.023     | 0.011     | 0.006     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 36. | 0.746     | 0.160     | 0.057     | 0.029     | 0.006     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 37. | 0.697     | 0.180     | 0.080     | 0.031     | 0.009     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 38. | 0.674     | 0.214     | 0.071     | 0.029     | 0.011     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 39. | 0.703     | 0.189     | 0.066     | 0.029     | 0.009     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 40. | 0.717     | 0.163     | 0.083     | 0.014     | 0.023     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 41. | 0.743     | 0.157     | 0.057     | 0.031     | 0.011     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 42. | 0.689     | 0.186     | 0.086     | 0.031     | 0.009     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 43. | 0.691     | 0.191     | 0.080     | 0.026     | 0.011     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 44. | 0.720     | 0.163     | 0.074     | 0.026     | 0.014     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 45. | 0.717     | 0.174     | 0.071     | 0.029     | 0.003     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 46. | 0.671     | 0.214     | 0.069     | 0.031     | 0.014     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 47. | 0.686     | 0.191     | 0.091     | 0.023     | 0.009     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 48. | 0.691     | 0.197     | 0.074     | 0.023     | 0.011     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 49. | 0.697     | 0.191     | 0.077     | 0.020     | 0.011     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 50. | 0.674     | 0.229     | 0.057     | 0.020     | 0.017     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 51. | 0.737     | 0.166     | 0.057     | 0.034     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 52. | 0.697     | 0.191     | 0.077     | 0.011     | 0.017     | 0.000     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 53. | 0.717     | 0.166     | 0.071     | 0.031     | 0.009     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 54. | 0.674     | 0.197     | 0.094     | 0.023     | 0.009     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 55. | 0.671     | 0.203     | 0.077     | 0.031     | 0.011     | 0.003     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 56. | 0.689     | 0.180     | 0.063     | 0.051     | 0.014     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 57. | 0.677     | 0.169     | 0.114     | 0.031     | 0.009     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 58. | 0.666     | 0.214     | 0.083     | 0.031     | 0.003     | 0.003     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 59. | 0.657     | 0.220     | 0.083     | 0.034     | 0.006     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |
| 60. | 0.686     | 0.217     | 0.074     | 0.023     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000     | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      | 0.000      |

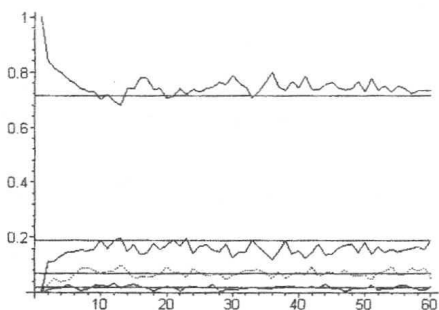
Figure 1.

**T=3** $r=0.05, q=0.9$ 

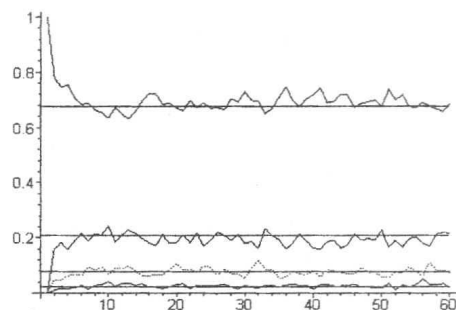
|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| $p_0$      | $p_1$      | $p_2$      | $p_3$      |
| 0.47419529 | 0.24957647 | 0.13712611 | 0.06930613 |
| 0.4923333  | 0.2325238  | 0.1335714  | 0.0714285  |
| $p_4$      | $p_5$      | $p_6$      | $p_7$      |
| 0.03476951 | 0.01744882 | 0.00875650 | 0.00439435 |
| 0.036      | 0.0163809  | 0.0080476  | 0.0055238  |

 $r=0.03, q=0.9$ 

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| $p_0$      | $p_1$      | $p_2$      | $p_3$      |
| 0.69096872 | 0.21370166 | 0.06771747 | 0.01965744 |
| 0.7056190  | 0.198      | 0.0676666  | 0.0210476  |
| $p_4$      | $p_5$      | $p_6$      | $p_7$      |
| 0.00566248 | 0.00163169 | 0.00047018 | 0.00013548 |
| 0.0051904  | 0.0019047  | 0.0003333  | 0.0002380  |

**T=6** $r=0.05, q=0.8$ 

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| $p_0$      | $p_1$      | $p_2$      | $p_3$      |
| 0.71433553 | 0.18798303 | 0.07050034 | 0.02018905 |
| 0.74376190 | 0.15961904 | 0.07157142 | 0.01876190 |
| $p_4$      | $p_5$      | $p_6$      | $p_7$      |
| 0.00519531 | 0.00133405 | 0.00034352 | 0.00008845 |
| 0.00466666 | 0.00119047 | 0.00028571 | 0.00014285 |

 $r=0.03, q=0.9$ 

|            |            |            |            |
|------------|------------|------------|------------|
| $p_0$      | $p_1$      | $p_2$      | $p_3$      |
| 0.67552716 | 0.20892592 | 0.07949521 | 0.02502542 |
| 0.68971428 | 0.19366666 | 0.07819047 | 0.02676190 |
| $p_4$      | $p_5$      | $p_6$      | $p_7$      |
| 0.00765242 | 0.00234139 | 0.00071651 | 0.00021926 |
| 0.00852381 | 0.00223809 | 0.00066666 | 0.00014285 |

Figure 2.

The diagrams in Figure 2 show the calculated results where the horizontal lines from top to bottom express the probabilities  $p_0, p_1, p_2, p_3$ , whose exact values can be seen in the upper line. Below we also give  $p_4, p_5, p_6, p_7$  values which are not included in the diagrams. In the lower lines one can see the average values obtained from numerical results shown in diagrams.

Even the examination of not more than 500 independent experiments and the cases of 60 arriving airplanes shows that the computed results clearly approximate the exact values.

## References

- [1] FARKAS, G., Investigation of a continuous cyclic-waiting problem by simulation, *Annales Univ. Sci. Bud. Sect. Comp.*, **19** (2000), 225–235.
- [2] GNEDENKO, B. V. AND KOVALENKO, I. N., *Introduction to queueing theory*, Birkhäuser, Boston, 1989.
- [3] KÁTAI I., *Szimulációs módszerek*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1981.
- [4] LAKATOS, L., On a simple continuous cyclic-waiting problem, *Annales Univ. Sci. Bud. Sect. Comp.*, **14** (1994), 105–119.
- [5] LAKATOS, L., On a cyclic-waiting queueing problem, *Theory of Stoch. Proc.*, **2** (18) (1–2) (1996), 176–180.
- [6] LAKATOS, L., On a discrete cyclic-waiting queueing problem, *Theory Probab. Appl.*, **42** (2) (1997), 405–406.
- [7] LAKATOS, L., On a simple discrete cyclic-waiting queueing problem, *J. Math. Sci. (New York)*, **92** (4) (1998), 4031–4034.
- [8] LAKATOS, L., A probability model connected with landing of airplanes, *Safety and reliability vol. I*, eds. G. I. Schuëller and P. Kafka, Balkema, Rotterdam, 1999, 151–154.
- [9] LAKATOS, L., Landing of airplanes (continuous time), *INFORMS Spring 2000, Salt Lake City, May 7–10, 2000*, 77–78.
- [10] LAKATOS, L., A special cyclic-waiting queueing system with refusals (manuscript)

### Gábor Farkas

Department of Computer Algebra  
Eötvös Loránd University  
H-1518 Budapest, P.O.B. 32.  
Hungary  
farkasg@compalg.inf.elte.hu

### Péter Kárász

Inst. of Mathematics and Informatics  
Budapest Polytechnic  
Nagyszombat u. 19.  
H-1034 Budapest, Hungary



## CONSTRUCTING RULED B-SPLINE SURFACES BY KOHONEN NEURAL NETWORK

Miklós Hoffmann, Emőd Kovács (Eger, Hungary)

**Abstract.** General and special ruled surfaces play a central role in several CAD applications. The purpose of this paper is to develop a method with the help of which one can construct free-form ruled surface for given lines as rulings. The Kohonen neural network and the Plücker coordinates of projective geometry help us to construct a standard free-form surface for these data.

**AMS Classification Number:** 68U05

### 1. Introduction

Ruled surfaces and their special subclass, developable surfaces are well-known in classical geometry, but also have extended applications in computer geometry and graphics as well as in computer aided manufacture. In these latter fields, however, the standard way of describing surfaces is the different types of spline-surfaces, like Bezier, B-spline or NURB surface. Hence it is highly desired to describe and construct ruled and developable surfaces as spline surface. Several methods have been developed to approximate or interpolate by such kind of surfaces, see e.g. [1,2].

The standard definition of any type of spline surfaces uses a quadrilateral control grid as input data, which is a  $(2, n)$  type in case of ruled surfaces. The main purpose of most of the known methods is to construct this control grid. In our method the Kohonen neural network has been applied in a preprocessing step to produce a control grid from the original input data. This artificial intelligence tool has already been applied succesfully by the authors in other approximation problems [3–5].

In our paper orginial input data structure consists of a set of given lines, called rulings. In this case the description of these lines and the neural network by homogeneous coordinates will be advantegous, which is a well-known technique in projective geometry. In another sense this computer geometrical approach has already been developed by Ravani et al. in [6]. The Plücker coordinates of the

projective lines [7] will be also applied, which is investigated by Chen and Pottmann [9].

## 2. Ruled Surfaces

We begin our discussion with the definition of ruled surfaces.

**Definition.** A surface is ruled surface, if through every point of the surface there passes a line which lies entirely on the surface. These lines are called rulings of the surface.

This means, that a ruled surface is covered by a one parameter set of lines, the rulings. These lines has the following property: a ruling lies in the tangent plane of the surface at every point of the ruling. This property is important in terms of the special ruled surfaces, called developable surfaces. The original definition of these surfaces is the following:

**Definition.** A surface is developable surface, if it can be isometrically mapped (i.e. developed) into the plane.

Considering the property of the ruled surfaces mentioned above and this latter definition, one can easily see the following, well-known result:

**Theorem.** *A ruled surface is developable, if and only if the tangent planes at all points of an arbitrary ruling coincide.*

If these tangent planes vary along the ruling, the surface is called general (non developable) surface. In this paper we will consider only general ruled surfaces.

## 3. Constructing Ruled Surfaces with Given Rulings

Consider the following problem: an arbitrary set of lines are given, find a ruled surface passing these lines, that is a surface for which the given lines are rulings.

More precisely, we would like to interpolate these given lines with one of the standard spline surfaces of CAD, a Bézier, a B-spline or a NURB surface. In this paper the B-spline surface will be used, but all of these surfaces are defined by a control grid of points, called control points. This grid regularly has a quadrilateral topology, and one can chose to approximate or to interpolate these points.

We will use the following well-known property:

**Theorem.** *If the points of the control grid of a B-spline surface form straight lines in one direction, then the result surface is ruled surface.*

Thus we need to form a quadrilateral grid in which the verteces form straight lines in the direction of the given lines. These lines will be the rulings of the future surface, if it will interpolate the control points, and the theorem mentioned above yields it will be a ruled surface. To find this grid the Kohonen neural network will

be applied. This tool will produce the desired grid from the given lines, and then this grid will be the input control grid of the standard interpolation method of the B-spline surface.

In earlier papers the authors has already been used this neural network for approximation and interpolation problems, mainly for constructing curves and surfaces from scattered points [3-5]. The Kohonen neural network has a strong self-organizing property, that is during the training procedure a topologically invariant grid of points is moved towards the scattered data and tried to follow their structure and distribution.

This network is a continuous valued two-layered network. The first layer is the input layer, and there are three input neurons, since normally the input values are coordinates of spatial points. The output layer consists of several neurons forming a quadrilateral grid. The neurons of the two layers are interconnected and each of the connections has a weight, which is modified by a certain training algorithm during the training procedure. Since every output neuron has three connections and three weights, these weights can be considered as spatial coordinates of points, which form a grid with the same topology as of the output neurons. This latter grid moves towards the given points and after the training procedure the grid will pass all of the input points. For the more detailed description of this method and the Kohonen neural network see the earlier papers of the authors and [8].

Now, however, this method has to be modified, since the input structure consists of lines instead of points, and the grid has to be fulfilled the property mentioned above. Here we have to introduce a very effective tool for handling spatial lines: the Plücker-coordinates. Let us briefly overview this classical part of geometry.

Consider the three dimensional projective space  $P^3$ . Here every point has four homogeneous coordinates  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , which correlate the Cartesian coordinates  $(x, y, z)$  as  $x = x_1/x_4, y = x_2/x_4, z = x_3/x_4$  if the point is not at infinity. Now consider a line  $l$  of  $P^3$  passing two points  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  and  $(y_1, y_2, y_3, y_4)$ . The six Plücker coordinates of this line will be

$$(l_1, \dots, l_6) := (l_{41}, l_{42}, l_{43}, l_{23}, l_{31}, l_{12}), \quad l_{ij} = x_i y_j - x_j y_i.$$

These coordinates do not depend on the choice of the two points on the line  $l$  and fulfill the Plücker identity:

$$l_1 l_4 + l_2 l_5 + l_3 l_6 = 0.$$

This 1-1 correspondence between the homogeneous 6-tupels of real numbers and the lines of  $P^3$  yields another 1-1 correspondence between the lines of  $P^3$  and the points of the five dimensional projective space  $P^5$ . With the help of this latter mapping we can embed the given rulings and the lines of the future grid of the surface. This way the Kohonen network will be trained by points from  $P^5$ , that is the input layer will contain 6 neurons, while the output layer will be a polygon

in  $P^5$ . When the neural network is trained, the result polygon passes through the given points of  $P^5$ . Transforming this situation back to  $P^3$  the given lines and a quadrilateral grid will be received, which grid contains the given lines and consists of straight lines at that direction.

#### 4. The Algorithm

Let a set of lines  $l^i, (i = 1, \dots, n)$  be given. Compute the Plücker coordinates of these lines:

$$l^i(l_j^i) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, 6$$

Consider a Kohonen neural network with 6 input neuron and  $m (= 4n)$  output neuron. Denote the weights of the connection from the  $j^{th}$  input neuron to the  $i^{th}$  output neuron by  $w_{ij}$ . Thus the weights  $(w_{i0j}), (j = 1, \dots, 6)$  of the connections to an output neuron can be considered as the coordinates of an output point  $V_i$  in  $P^5$ .

Now we train the Kohonen neural network. Initializing the weights  $w_{ij}$  as small random values around the average of the coordinates of the input points and setting the training time  $t = 1$ , the coordinates  $(l_j^{i_0}), (j = 1, \dots, 6)$  of a randomly chosen input point is presented. The Euclidean distance of all output points to this input point is computed:

$$d_m = \sum_{s=1}^6 (l_s^{i_0} - w_{ms})^2$$

Finding the winning unit, that is the output point closest to the input one, the weights of the connections to this point and to its neighbors are updated by

$$w_{ij}(t+1) = w_{ij}(t) + \eta(t)(l_j^{i_0} - w_{ij}(t))$$

where  $t$  denotes the training time. After updating the weights a new randomly selected input is presented until the network is trained. The network is said to be trained, if all the input lines are on the grid. If the input structure consists of hundreds of lines, then this requirement would yield long computing time, hence in this case the network is trained if the changes of the weights fall under a predefined limit.

When the training process finished, the result is a polygon in  $P^5$  with the vertexes  $V_i(w_{ij}), (i = 1, \dots, m), (j = 1, \dots, 6)$ . Transforming these vertexes back to  $P^3$  the projective lines  $v_i$  are received, with the Plücker coordinates  $(w_{ij})$ . Using the definition of these coordinates backwards, the points of these lines can be computed. Thus a set of lines is gained among which the all the original input lines can be found.

During the training session one can compute the whole grid at every training time  $t$ , using the points of the lines  $v_i$  as vertexes connected also in the other

direction. Hence after the training procedure beside the rulings a quadrilateral grid containing these rulings is also received. The vertices of this grid can be applied as input control points to any of the standard free-form surface algorithm. Hence we can interpolate or approximate these points and the rulings.

## 5. Concluding Remarks

Obviously there are infinitely many ruled surface passing through a set of given spatial rulings, and probably each of the methods would produce a different one. Comparing our method with other algorithms the main advantage is the following: beside the self-organizing ability of the Kohonen network it also has a minimal energy property (see [8]), that is the network tries to minimize the strain energy during the training session. Hence in a sense the result grid is the smoothest grid containing all the given rulings, while other methods cannot guarantee this property.

The method described above could be developed also for developable surfaces, but it is a subject for further research.

## References

- [1] HOSCHEK, J., SCHWANECKE, U., Interpolation and approximation with ruled surfaces, in: *The Mathematics of Surfaces VII.* (ed.: Robert Cripps), Elsevier, (1988) 213–231.
- [2] POTTMANN, H., FARIN, G., Developable rational Bezier and B-spline surfaces, *Computer Aided Geometric Design*, **12** (1995), 513–531.
- [3] HOFFMANN, M., VÁRADY, L., Free-form curve design by neural networks, *Acta Acad. Paed. Agriensis*, **24** (1997), 99–104.
- [4] HOFFMANN, M., VÁRADY, L., Free-form surface design by neural networks, *Journal for Geometry and Graphics*, **2** (1998), 1–6.
- [5] VÁRADY, L., HOFFMANN, M., KOVÁCS, E., Improved free-form modelling of scattered data by dynamic neural networks, *Journal for Geometry and Graphics*, **3** (1999), 177–183.
- [6] BODDULURI, R., RAVANI, B., Design of developable surfaces using duality between plane and point geometries, *Computer-Aided Design*, **10** (1993), 621–632.
- [7] HLA VATY, V., Differential line geometry, Nordhoff Ltd, Groningen (1953)
- [8] KOHONEN, T., Self-organization and associative memory, 3rd edition, Springer Verlag (1996)
- [9] CHEN, H., POTTMANN, H., Approximation by ruled surfaces, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **102** (1999), 143–156.

**Emőd Kovács**

Inst. of Mathematics and Informatics  
Eszterházy Károly College  
H-3300 Eger, Hungary  
Leányka str. 4.  
e-mail: emod@ektf.hu

**Miklós Hoffmann**

Inst. of Mathematics and Informatics  
Eszterházy Károly College  
H-3300 Eger, Hungary  
Leányka str. 4.  
e-mail: hofi@ektf.hu

## CURVE RECONSTRUCTION FROM SCATTERED DATA BY KOHONEN NETWORK

Emőd Kovács (Eger, Hungary)

**Abstract.** The aim of this paper is to extend the method of modelling scattered data by free-form surfaces presented in [7]. In that paper the Kohonen neural network was used for ordering the data from the scattered points. After the ordering process the B-spline curve or surface approximation and interpolation methods can be applicable also for scattered input points. In this paper we extend this method to solve this problem in case of infinite set of data getting from a cloud of points. A given B-spline curve can also be reconstructed by our method with the help of the Kohonen network.

**AMS Classification Number:** 68U05

### 1. Introduction

The manipulation of scattered data is interesting problem, and we can find several application of approximation and interpolation of scattered data in computer graphics and CAD/CAM. In paper [8] mentioned above we developed a new technique for modelling scattered data by free-form surfaces. The main advantage of this method is a preprocessing step which produces a topologically quadrilateral grid from scattered data, hence the basic free-form methods can be applied without any kind of restrictions or modifications. The standard free-form methods like Bézier-surface or NURBS could be applied to approximate or interpolate the data. On the other hand, the new method apply the advantage and effectiveness of the artificial neural networks. The improvement of the network yields a much faster and more reliable algorithm. Obviously the method is also applicable in the case of curves in two or three dimension, when we would like to receive a curve from a cloud of infinitely many points.

For the mentioned preprocessing step an artificial neural network, the Kohonen network, developed by T. Kohonen [2] has been used. The Kohonen network has a self-organizing ability of learning data, which allows a predefined grid to keep its topology during the training procedure, when this grid moves towards the scattered points and follows their spatial structure. The expression "training" will be describe

later, since this is the basic point of the neural network as well as our entire method. A good survey of this method can be found in [8] and [9].

In this paper we try to apply this method in the case of reverse engineering. The final result is a method, which can handle arbitrary set of scattered points. During the reverse engineering process we can capture point data from the curve or surface and applying Kohonen network to produce a CAD model of the object. Hence the user can edit the model to produce an improved or modified object, and perform other computation, leading to whole range of possibilities. We extend the method in training phase, which means that the Kohonen network is trained by point data captured from the object. But these data are not the same in the training cycles, the only common property is that all data are captured from the same object. We can call these type of data stream as infinite data. The number of various data only depends on the measure method. We will prove that the obtained polygon is also applicable for example the B-spline interpolation. Moreover we will examine the reliability and the efficiency of the Kohonen network adapted to the problem mentioned above.

## 2. Interpolation and Kohonen network

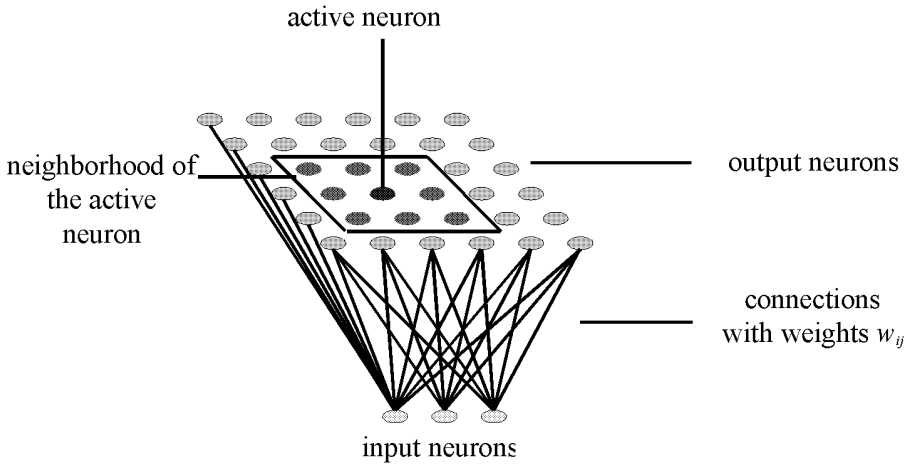
First of all we describe the theory of the Kohonen neural networks and our extension. After this step we will discuss the application of this method for our special problem. The final result is demonstrated by a B-spline interpolation of scattered points. Since the theory of the artificial neural networks is well-known, for details and survey of them we refer e.g. Freeman [4] and Rojas [5]

In this paper we only give a short description of the algorithm of the applied Kohonen network, which produces a rectangular grid onto the 3D scattered points. The exact algorithm can be found in full details in Hoffmann, Várady [8]. The Kohonen net is a two-layered, unsupervised, continuous valued network. The great advantage of this network, which will be used in this problem, is the ability of fast organization of any number of unordered points. The training procedure will result a topology preserving grid following the structure of the input points. The number of input neurons is three, since the network will be trained by the coordinates of the 3D input points. The output neurons form a quadrilateral grid, and this topology will be preserved during the whole procedure. In the case of 2D input points the output neurons form a line grid. All the output nodes are connected to each input node and a weight is associated to every connection and adjusted during the training. Hence a three or two dimensional weight vector is assigned to each output node. Now consider these weights as the spatial coordinates of points of the grid. During the training process the weights will be changing, hence this grid will move slowly in the three dimensional space toward the input points, meanwhile the topology of the grid will remain the same.

The original situation is the following. Let a set of points  $p_i(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i})$  ( $i = 1, \dots, n$ ) be given. In our case the number of the points are also given, but every



training period is not required the same input points. During the algorithm we choose  $n$  points randomly from the clouds of points. The coordinates of these points will form the input vectors of the net, but every training period this input vector is different from the previous one. The net itself contains two layers: the input layer consists of three nodes and the output layer consists of  $m$  nodes. The number  $m$  depends on the number of input vectors, generally  $m = 4 \times n$  is used, where  $n$  is the number of input points. However if the number of input points is large, or the input is given by a distribution, then  $m$  can be a convenient number independently of the input points. We have to remark, that the large number of input points yield difficult problem, when we want to use e.g. B-spline interpolation. These  $m$  output nodes form a grid with arbitrary, but predefined topology, which is quadrilateral in our case. Each node of the output layer connected to each of the nodes of the input layer. Every connection has a weight:  $w_{ij}$  denotes the weight between the input node  $i$  and the output node  $j$ . The following figure shows the topology of the Kohonen map.



### 3. Efficiency of the algorithm

Since the original method has been described in [7], now we care only for the application of the network and our modification of the algorithm and the results.

If the number of input points in one training cycle is relatively small, then the network is said to be trained if all the input points are on the grid. If we have hundreds of input points, or data given by a distribution, as in some of the scattered data problems, then this requirement would yield long computing time.

In this case the network is said to be trained if the changes of the grid is under a certain predefined limit.

At the beginning of the process the weights of the network have to be initialized. The initialization gives a starting spatial location to the points of the grid. Run results show that different type of input points may need different initializations. The simplest way is to set the weights to small random values. In this case the output points can be far from the input points.

To increase the efficiency of the procedure the weights have to initialize around the centroid of the input points. In case of several input points or a distribution we should initialize the weights close to the point where the density (or the distribution) of the inputs is the highest. This place can be easily determined by clustering the input points. The weights are initialized around the centroid of that cluster.

In two cases the method can give fail result. One of them can occur when the network does not converge, the other one can occur during the Gaussian elimination (see later), because the large number of input points may produce a singular matrix and it cannot be solved. The table below shows the changes of the number of sufficient iterations and interpolations (average after several runs). In our case the weights are initialized by the clustering method.

| input points | iterations | neurons | fail |
|--------------|------------|---------|------|
| 10           | 3250       | 40      | 3%   |
| 100          | 6120       | 400     | 2%   |

#### 4. B-spline interpolation of the output points

When we get the output points, we want to determine a polygon that generates a B-spline curve for a set of known output points we considered. If data points  $Q_k, k = 0, \dots, n$  lies on the  $p$ th-degree nonrational B-spline curve, then it must satisfy the  $(n + 1) \times (n + 1)$  system of linear equations

$$Q_k = C(\bar{u}_k) = \sum_{i=0}^n B_i N_{i,p}(\bar{u}_k) \quad (1)$$

where we assign a parameter value,  $(\bar{u}_k)$  to each  $Q_k$ , and select an appropriate knot vector  $U = u_0, \dots, u_m$ .

The control points,  $B_i$ , are the  $n + 1$  unknowns. Eq.(1) has one coefficient matrix, with  $r$  solution sets for the  $r$  coordinates of the  $B_i$ , if  $r$  is the number of coordinates in the  $Q_k$  (typically 2,3, or 4).

The problem of choosing the  $\bar{u}_k$  and  $U$  remains, and their choice affects the shape parameterization of the curve. We assume that the parameter lies in the

range  $u \in [0, 1]$ . A lot of common methods are known, equally spaced, chord length, centripetal method. (For more details please see e.g. [1]). In this paper we use a centripetal method: Let

$$d = \sum_{k=1}^n \sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}$$

Then  $\bar{u}_0 = 0$  and  $\bar{u}_n = 1$ ,

$$\bar{u}_k = \bar{u}_{k-1} + \frac{\sqrt{|Q_k - Q_{k-1}|}}{d} \quad k = 1, \dots, n-1.$$

This method gives better result than the chord length method when the data takes very sharp turns. Combining the centripetal method with the averaging technique is recommended. *Averaging*,

$$u_0 = \dots = u_p = 0 \quad u_{m-p} = \dots = u_m = 1$$

$$u_{j+p} = \frac{1}{p} \sum_{i=j}^{j+p-1} \bar{u}_i \quad j = 1, \dots, n-p$$

This combination leads to a system of equations Eq.(1) and provides the next advantage,  $N_{i,p}(\bar{u}_k) = 0$  if  $|i - k| \geq p$ . Hence, it can be solved by Gaussian elimination. We used a LU Decomposition to decompose the coefficient matrix into *Lower* and *Upper* triangular components. A good survey of this method can be found in [10].

Although the continuity of the resulting curve is everywhere  $C^{p-2}$ , it may not be smooth, or sweet, or fair. The fitted curve may develop unwanted wiggles or undulations. A fairer or smoother curve is obtained by specifying defining polygon points than data points, i.e.,  $2 \leq p \leq n+1 < k$ . The Eq.(1) is more compactly written in matrix form as

$$[Q] = [N] [B]$$

$$[N]^T [Q] = [N]^T [N] [B]$$

$$[B] = \left[ [N]^T [N] \right]^{-1} [N]^T [Q]$$

Here,  $[N]$  is no longer square, the problem is overspecified and can only be solved in a mean sense.

## 5. Concluding Remarks

Scattered data manipulation is one of the important questions of computer graphics. Comparing with other methods the advantages are twofold: using this

algorithm the ordered and scattered points can be interpolated by the same type of curve, while in term of scattered points our algorithm can be used in a wide range of input conditions. We plan to extend our method to the interpolation of the surface which surface is given by scattered points.

### References

- [1] PIEGL, L., TILLER, W., The NURBS Book, Springer Verlag, 1997.
- [2] KOHONEN, T., Self-organization and associative memory, Springer Verlag, 1984.
- [3] FARIN, G., Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A Practical Guide, Academic Press, 1996.
- [4] FREEMAN, J., SKAPURA. D., Neural Networks; Algorithms, Applications and Programming Techniques, Addison-Wesley, 1991.
- [5] ROJAS, R., Neural Networks. A Systematic Introduction, Springer-Verlag, 1996.
- [6] VÁRADY, L., Analysis of the Dynamic Kohonen Network Used for Approximating Scattered Data, Proceedings of the 7th ICECGDG, Cracow (1996), 433–436.
- [7] HOFFMANN, M., VÁRADY, L., Free-form curve design by neural networks, *Acta. Acad. Paed. Agriensis*, , **Tom. XXIV.**, (1997), 99–104.
- [8] HOFFMANN, M., VÁRADY, L., Free-form Surfaces for Scattered Data by Neural Networks, *Journal for Geometry and Graphics*, **Vol. 2, No. 1** (1998), 1–6.
- [9] VÁRADY, L., HOFFMANN, M., KOVÁCS, E., Improved Free-form Modelling of Scattered Data by Dynamic Neural Networks, *Journal for Geometry and Graphics*, **Vol. 3, No. 2**, (1999), 177–181.
- [10] PRESS, W. H., FLANNERY, B. P., TEUKOLSKY, S. A., VETTERLING, W. T., Numerical Recipes in Pascal, The Art of Scientific Computing, Cambridge University Press, 1989

### Emőd Kovács

Institute of Mathematics and Informatics  
Eszterházy Károly College  
Leányka str. 4–6.  
H-3300 Eger, Hungary  
e-mail: emod@ektf.hu

## MATEMATIKAI FELADATMEGOLDÓ GONDOLKODÁS MÉRÉSE SZÁMELMÉLETI FELADATOKKAL

Orosz Gyuláné (Eger, Hungary)

**Abstract.** The aim of this paper is to give a short summary of our experimental investigations by using of a multiple-choice test made up of 25 elementary number theory problems. Questions are written by high school and college teachers and tried out under standard testing conditions by representative samples of students. The responses to each question were then analyzed statistically. 614 pupils were selected for our study around ages 13 to 14, in the seventh grade from Eger, in 1997. The following thesis is proved by using of statistical method: The 7th grade and 8th grade pupils' achievements of the Number Theory Test are significant difference neither into topics nor the dimension of thinking operations.

### 1. A matematikavizsgálat eszköze, a feladatok

Vizsgálatunkat Eger 12 általános iskolájában végeztük az 1996–97-es tanév végén, amelybe összesen 614 tanulót vontunk be. A mérés résztvevői 7. és 8. osztályos tanulók voltak. A vizsgálatokban a feladatlapos és az egyéni felmérés módszerét alkalmaztuk. Jelen dolgozatunkban a zárt számelméleti feladatokkal történt mérési eredményeinket ismertetjük.

Az objektív értékelés kívánalmaira való tekintettel a mérést a feleletválasztásos tesztkérdések alkalmazásával oldottuk meg. A tesztet előzetesen kipróbált, bemért feladatokból állítottuk össze. 25 feladatot választottunk ki, ahhoz a vizsgálatához amelyben azokat a 7. és 8. osztályos tanulók vontuk be, akik az egyéni és nyílt feladatokkal történő vizsgálatok résztvevői voltak. Nem vonatkoztathatunk el attól a tényről, hogy a tanulók ilyen irányú tudásukat az iskolai tananyagon keresztül különböző szintű gondolkodási műveletek megvalósítása során sajátítják el. Ezért a mérésre kijelölt feladatokat is ezen dimenziók szerint jellemezhetjük. Ügyeltünk arra is, hogy az így jellemezhető feladatok betöltött szerepük részarányának és fontosságának megfelelően legyenek reprezentálva. A feladatokat két dimenzió mentén osztályoztuk a fentiek alapján. Az egyik a matematikai tartalom, a másik a feladatok megoldását igénylő gondolkodási műveletek dimenziója. A *Monitor '95* vizsgálatok célkitűzéseinek megfelelően a tanulók matematikai eszköztudásának feltárására vállalkoztunk.

Az „eszköztudás” azoknak a matematikai ismereteknek, készségeknek a birtoklását jelenti, amelyek egyrészt a többi tantárgy zökkenőmentes iskolai elsajátításához nélkülözhetetlenek, másrészt pedig a mindennapi élet bizonyos feladatainak, problémáinak megoldásához szükségesek (Hajdu S., 1989).

## 2. A feladatok matematikai tartalom szerint

*Prímszámok, összetett számok.* Ebbe az osztályba azokat a feladatokat soroltuk, amelyek a természetes szám, páros, páratlan, prímszám, összetett szám pozitív egész fogalmakkal kapcsolatos ismeretek, eljárások meglétét mérik.

*Oszthatóság.* Ezek a feladatok az általános iskolában tanult oszthatósági szabályok felismerését, alkalmazását képviselik (pl. 3-mal, 9-cel, 4-gyel, 25-tel 12-vel való oszthatóság).

*Osztók, többszörösök.* A közös osztók, közös többszörösök, legnagyobb közös osztó, legkisebb közös többszörös, a számok prímtényező felbontásával kapcsolatos feladatok jelentik ezt az osztályt.

*Számolás a maradékokkal.* Ezek a feladatok különböző hatványok adott számokkal történő osztási maradékait, adott hatványok, szorzatok utolsó, illetve utolsó két számjegyének végződéseinek meghatározásával kapcsolatosak.

## 3. Feladatok a gondolkodási műveletek szerint

*Ismeret típusú.* Ebbe a kategóriába azok a feladatok tartoznak, amelyek egy-egy számelméleti fogalom ismeretét, megértését, felidézését, ezek biztos kezelését feltételezik.

*Direkt rutineljárás típusú.* A kérésre, utasításra elvégzendő konkrét egyszerű rutin műveletek kivitelezését, hibás eredmény megtalálását igénylik. (Adott számok közös osztóinak keresése, prímtényező felbontásának elkészítése stb.)

*Rutineljárást igénylő, szöveges típusú.* Azokat a szöveges feladatokat soroltuk ebbe a kategóriába, amelyekbe a szöveg megértése alapján az egyszerű műveletek felidézése vagy felismerése és elvégzése a tanulók teendője. (Az osztók számának paritását meghatározni konkrét számok esetén stb.)

*Problémamegoldás típusú.* Ezzel a kategóriával azokat a feladatokat jellemeztük, amelyek a problémalátást, a több különböző ismeret együttes felidézését és különböző műveletek elvégzését vagy matematikai modellek felismerését és alkalmazását igénylik a megoldás során.

A fenti kategóriáknak a meghatározásánál figyelembe vettük a tantervet a *Monitor '95* vizsgálatot és azokat a nemzetközi vizsgálatokat is, amelyeknek Magyarország tagja (IEAP 1991). Saját kutatásunkban a matematika egyetlen tartalmi területére korlátoztuk figyelmünket, s ezáltal lehetőségünk adódott több részterület alaposabb elemzésére. Az eszköztudásnál valamivel magasabb szintet képviselnek a probléma típusú feladataink, mert a problémamegoldó gondolkodás mérésére helyeztük a hangsúlyt. A matematikai gondolkodásban a számokkal való bánás képessége lényeges szerepet játszik, ezért választottuk a feladatokat az elemi számelmélet tartalmi területéről.

## 1. táblázat

A feladatok megoszlása a matematikai tartalom szerint

|         | Prím | Osztható | Osztó | Maradék | Összes |
|---------|------|----------|-------|---------|--------|
| Feladat | 7    | 6        | 6     | 6       | 25     |
| %-ban   | 28   | 24       | 24    | 24      | 100    |

## 2. táblázat

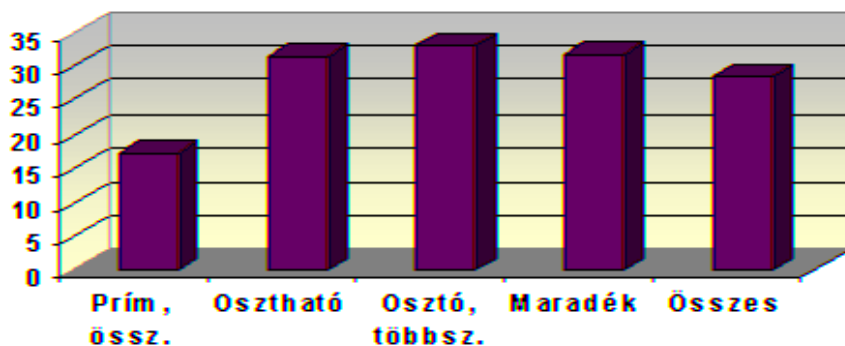
A feladatok megoszlása az értelmi műveletek szerint

|         | Ismeret | Direkt | Rutin | Probléma | Összes |
|---------|---------|--------|-------|----------|--------|
| Feladat | 5       | 5      | 5     | 10       | 25     |
| %-ban   | 20      | 20     | 20    | 40       | 100    |

## 4. A teszt összehasonlíthatósága a korábbi vizsgálatokkal

A teszt a jelenlegi tudásállapot felmérésére szolgál, a változások csak a korrekt összehasonlíthatóság biztosítása esetén mutathatók ki. Ennek a korosztálynak az ezt megelőző mérése 1986-ban történt. Az akkori eredményekkel való egybevetetőséget úgy biztosítottuk, hogy a feladatok kategorizálását az akkori monitor vizsgálatnak megfelelően végeztük el. Mivel a teszteket a 7. és 8. osztályos tanulók egyaránt megoldották, lehetőség adódott a fejlődés tendenciáinak feltárására a tartalmi és gondolkodás műveletek dimenziók mentén egyaránt. A tesztfeladatok a Zrínyi Ilona Matematikaversenyen ugyanezen korosztálynál korábbi években standardizálásra kerültek, ami lehetőséget teremtett az országos eredményekkel történő összehasonlításhoz.

## 5. Eredmények a tartalmi kategóriák szerint



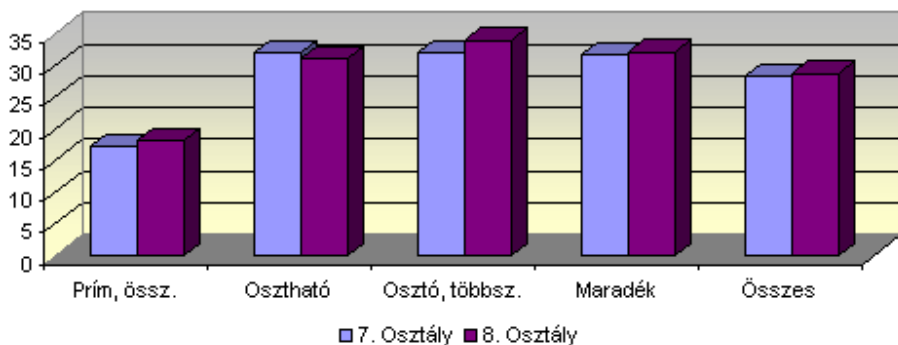
3. ábra

A matematikai tartalmi elemek szerint elért eredményeket a 3. ábra grafikonja mutatja be. Az ábráról leolvasható az a tény, hogy az egyes tartalmakban elért teljesítmények között igen jelentős különbségek vannak. Ez azért lehangelő tény, mert a feladatok kiválogatásának alapját az képezte, hogy a szükséges matematikai eszköztudás meglétét mérik. Minden területen magasabb teljesítményi nívót vártunk el a 7–8. osztályos tanulóktól.

A legmagasabb teljesítményi szint az osztó többszörös területhez tartozik (32%). Egy lehetséges feltételezés az, hogy az az anyagrész a tanulókhöz közelálló kedvelt, érdekes. A feladatok részletesebb elemzése alapján azonban azt lehet mondani, hogy az oszthatósággal kapcsolatos szabályok alkalmazásakor elsősorban a közismert oszthatósági feladatok megoldása áll elfogadható szinten. Az összetett szabályok alkalmazását feltételező feladatokban igen alacsony a teljesítmény (például a 6. item 21%).

A maradékok témakörbe a prímszám összetett szám témakörbe tartozó ismeretekkel rendelkeznek legkevésbé tanulóink (15%). Meglepő, hogy a 8. item teljesítése mindössze 8%, amelynek feltételezhető oka, hogy olyan összetett problémáról van szó, amely több ismeret, szabály együttes mozgósítását igényli, amelyre a vizsgált korosztály jelentős hányada nem képes. Ez azért sajnálatos, mert megerősíti azt a tényt, hogy a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésére nem jut elég idő az oktatás jelenlegi keretei között.

#### 6. Osztályok szerinti teljesítmények matematikai tartalom szerint



4. ábra

A 4. ábra azt mutatja, hogy a matematikai tartalom szerinti teljesítményekben nem mutatkozik számottevő különbség a 7. és 8. osztályos tanulók között. Kétmin-tás  $t$ -próbával ellenőriztük az egyes itemekben elért teljesítményeket és mindössze 5 item esetén érnek el szignifikánsan jobb eredményt a 8. osztályos tanulók, mint a 7. osztályosak, ugyanakkor 6 item esetén a 7. osztályos tanulók jobbak ami szintén

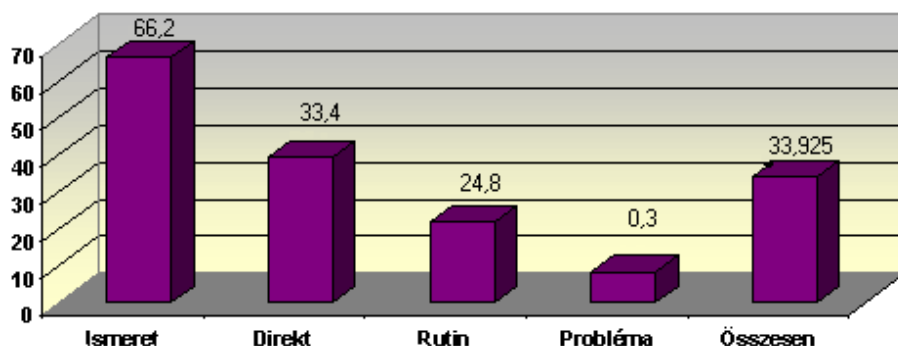


szignifikáns. Ez azért is lehangoló tény, mert azt jelzi, hogy bizonyos tartalmak esetén a fejlődés fordított irányú.

Egy lehetséges feltételezésünk az, hogy sokat ronthatott az eredményeken a tanulók figyelmetlensége, szétszortsága, a 13-14 éves tanulók közismert életkori sajátosságai, a motiválatlanság, melynek együttes hatása megjelenik a teljesítményekben.

Az induktív gondolkodás fejlődésének vizsgálatánál (Csap Ben, 1997) sem talált magyarázatot a 7. osztályos tanulók fejlődésében mutatkozó törésre.

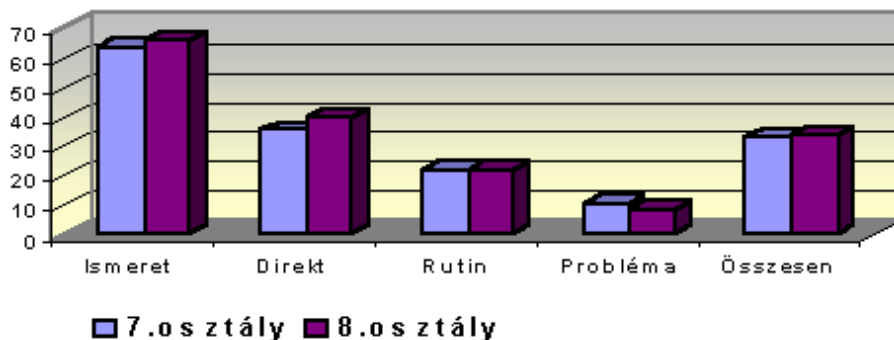
## 7. Eredmények a gondolkodási műveleti kategóriák szerint



5. ábra

A gondolkodási műveletek szerinti kép a természetesen elvárható hierarchikus rendet mutatja. Az ismeretek terén nyújtották a legmagasabb teljesítményt a tanulók és a problémamegoldási képesség a legalacsonyabb szintű. Összehasonlítva a kapott eredményünket az 1995-ös Monitor mérés eredményével jelentős a különbség a problémamegoldó gondolkodás típusú feladatok megoldásában nyújtott teljesítményben. Az általunk kapott teljesítmény mindössze 8,3%, míg a az országos eredmény szerint 50%. Ennek háttérében az állhat, hogy az általunk használt mérőeszköz több problémamegoldás típusú feladatot tartalmazott, mint az országos mérés, valamint az általunk vizsgált tanulók is fiatalabbak.

### 8. Teljesítmények osztályok és gondolkodási műveletek szerint, százalékban



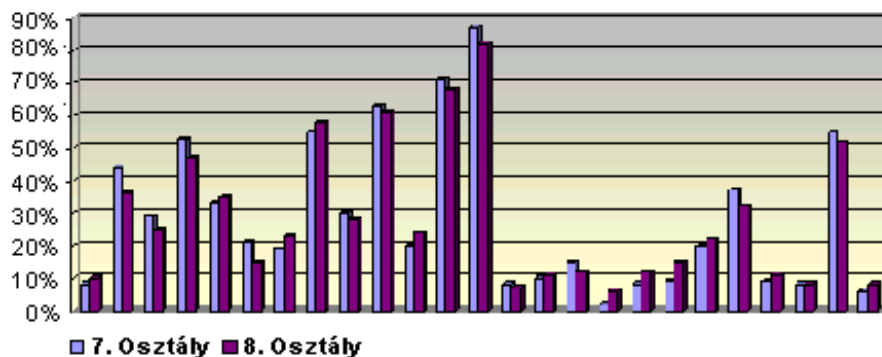
6. ábra

A gondolkodási műveletek szerinti részteljesítményekben nem mutatkozik lényeges különbség sem a 7., sem a 8. osztályos tanulók javára.

### 9. Kiemelések a vizsgálat további eredményeiből

Vizsgáltuk a nemek tartalom és gondolkodási műveletek dimenziók mentén nyújtott teljesítményét, amely nem mutat lényeges különbséget.

### 10. Az 1992-es országos és 1997-es mérés teljesítményeinek összehasonlítása



7. ábra

Sajnálatos, hogy az 1997-es mérésben kapott teljesítmények alacsonyabbak, mint az 1992-es országos mérés eredményei. Ennek hátterében több ok is szerepet játszhat (például tantervi változások, iskolaszervezet átalakításai stb.).

A tanulók megoszlása az előző félévi matematikaosztályzataik szerint

3. táblázat

| Osztályzat  | 1   | 2    | 3    | 4    | 5   |
|-------------|-----|------|------|------|-----|
| A minta %-a | 4,2 | 26,8 | 38,4 | 23,3 | 7,3 |

A vizsgált mintában nincs torzulás az osztályzatok megoszlása szerint.

A tanulók megoszlása a matematika kedveltsége szerint

4. táblázat

| Kedveltség         | A minta %-a |
|--------------------|-------------|
| Kedvenc tantárgy   | 38,7        |
| Általában szereti  | 28,6        |
| Nem nagyon szereti | 16,7        |
| Legkevésbé szereti | 18,0        |

Örömteli tény, hogy ezen korosztály 67,3%-a kedveli a matematikát. A *Monitor '95* mérésben részt vett 16 éves tanulóknak mindössze 42,3%-a, kevesebb mint a fele kedveli a tantárgyat.

## Irodalom

- [1] FRIED ERVIN: Oszthatóság és számrendszerek Általános iskolai szakköri füzet. Tankönyvkiadó, Budapest, 1980.
- [2] GÁBOR ADÉL—HALMOS MÁRIA: Számelméleti munkafüzet. Kalibra Kiadó, Budapest, 1991.
- [3] CSEPCSÁNYI É.—CSORDÁS M.—KOLESZÁR E.—NAGY T.: Matematikai versenyteszték. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1995.
- [4] TOMPA K.: Monitor, Matematika, A matematikai tudás mint az életben való boldogulás eszköze. *Pedagógiai Szemle*, 1995.
- [5] HAJDU S.: A középfokú oktatásba lépő fiatalok matematikai műveltségének sajátosságai. *Pedagógiai Szemle*, 1989.

**Orosz Gyuláné**

Institute of Mathematics and Informatics

Eszterházy Károly College

Leányka str. 4–6.

H-3300 Eger, Hungary

ogyne@ektf.hu

## A MATEMATIKAI ANALÍZIS OKTATÁSA SORÁN TAPASZTALT PROBLÉMÁKRÓL ÉS HIBÁKRÓL II.

Rados Mihály (Eger, Hungary)

**Abstract.** Those problems are illustrated which are studied in the first part of this paper (Acta Acad. Paed. Agriensis, Sectio Mathematicae 26, 1999. 115–120.) with some typical mistakes [9].

### 1. Bevezetés

A címben és az absztraktban jelzett problémakör kimeríthetetlen, a teljes feldolgozás lehetetlen, mivel diákjaink leleményessége ezen a téren nem ismer korlátokat. Célunk csak az lehet, hogy egy kis „gyomlálást” végezve a hibák között, világosabban lássuk, mi van még hátra. Nekünk, tanároknak ügyelnünk kell arra is, hogy ha a hibákat a hallgatók előtt nyomatékosan ismertetjük, nehogy ezen hibák bevésésének megerősítését eredményezze!

A feladatok és megoldások során a kitűzött fő cél kiemelése érdekében sokszor eltekintünk például a függvények precíz megadásától, a függvény és függvényérték ( $f$ , illetve  $f(x)$ ) következetes megkülönböztetésétől, vagy annak vizsgálatától, hogy a kijelölt művelet mely halmazon, intervallumon végezhető el.

### 2. Primitív hibák, durva tévedések

Ezeket meg sem kellene említeni, ha nem fordulnának elő, mert nem az általános iskolára, hanem szinte az alsó tagozatra vonatkoztathatók:

- egyenlőtlenségek szorzása negatív számmal, reciproklépése;
- közös nevezőre hozás (!);
- tört osztása egész számmal, osztás törttel;
- a hatványozás azonosságai stb.

Egyes hallgatók vagy abszolút képzetlenségük vagy teljes felületességük miatt követik el ezeket a nem elnézhető hanyagságokat, de erősen kétséges, hogy lesz-e belőlük matematika szakos tanár!

### 3. Elemi hibák

#### 3.1. Függvények paritása

Ha elhangzik a tanári kérdés: „Amennyiben egy függvény nem páros, ekkor paritás szempontjából milyen?” — sokszor jön automatikusan a válasz: „akkor páratlan”! Elég könnyű rávezetni őket, hogy vannak se nem páros, se nem páratlan függvények. Például:

$$f(x) := x^2 + 5x + 7$$

$$g(x) := e^x$$

$$h(x) := \sin x + \cos x$$

$$i(x) := \ln x$$

A logaritmusfüggvény például negatív valós számokra és  $x = 0$ -ra nincs is értelmezve. Most következhet az összetett függvényekkel való bonyolítás, s ez visszavezet a definíció alkalmazásának szükségességére.

(a)  $f(x) := \ln(x^2 + \sqrt{x^2 + 1})$ ;  $D_f = \mathbf{R}$  páros vagy páratlan?  $f(-x) = f(x)$ , tehát páros!

(b)  $f(x) := \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$  páros vagy páratlan?

Megoldás:  $f(-x) = \ln(-x + \sqrt{x^2 + 1}) = \ln \left[ \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \cdot (\sqrt{x^2 + 1} + x) \right] = \ln \left( \frac{x^2 + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \right) = -\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = -f(x)$  Tehát a függvény páratlan! Megjegyezzük, hogy ez a függvény az area sinus hyperbolicus függvény.

(c) Bizonyítsuk be, hogy minden függvény, amely egy 0-ra szimmetrikus intervallumon van értelmezve, megadható egy páros és egy páratlan függvény összegeként!

Megoldás:  $f: I \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ .

Legyen  $\varphi(x) := \frac{f(x) + f(-x)}{2}$  és  $\psi(x) := \frac{f(x) - f(-x)}{2}$ . Mivel  $\varphi$  páros,  $\psi$  páratlan, ezért igaz az állítás.

#### 3.2. Törtek

Feladat: Egy tört értéke növekszik vagy csökken, ha számlálójához és nevezőjéhez ugyanazt az  $a \in \mathbf{R}^+$  számot hozzáadjuk?

Megoldás: A hallgatók univerzális választ akarnak megfogalmazni azonnal, pedig itt egy diszkusszióra van szükség!

Legyen az adott tört:  $\frac{p}{q}$ , ahol  $p, q \in \mathbf{Z}$ ;  $q \neq 0, q \neq -a$ . Vizsgáljuk a tört értékének növekedését!  $\frac{p+a}{q+a} - \frac{p}{q} = \frac{a(q-p)}{q(q+a)} > 0$ , azaz  $\frac{p+a}{q+a} > \frac{p}{q}$ .

(α) ha  $q > 0$  és  $q > p$ .

( $\beta$ ) ha  $p < q < -a$ .

( $\gamma$ ) ha  $-a < q < 0$  és  $q < p$ .

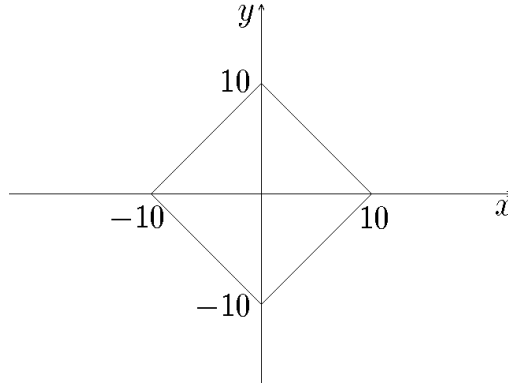
Megjegyzés:  $a = 1$ -re ( $\gamma$ ) nem teljesülhet. Hasonlóan kiválasztható, hogy mikor csökken a tört értéke.

3. Feladat: Ábrázoljuk a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben a következő síkgörbét:

$$|x| + |y| = 10, \quad x, y \in \mathbf{R}$$

Megoldás: sokszor ötletszerűen ábrázolnak alakzatokat, nem tudatos az abszolút-érték jelének elhagyása síknegyedeként!

A megoldás:



4. Feladat: Mennyi az  $f(x) := x^2$  függvény görbéje és az  $x$ -tengely közötti síkidom területe a  $[0, a]$  intervallumon?  $a \in \mathbf{R}^+$

Nyilván:  $T = \int_0^a x^2 dx = \frac{a^3}{3}$ . És ha  $a = 3$  cm?!  $T = \frac{27}{3}$  cm<sup>3</sup>; Ezt a problémát szokás dimenzionális csapdának is nevezni; az integrál csak egy valós számot ad eredményül. Például

$$\int_0^a x^5 dx = \frac{a^6}{6} \qquad T = \frac{1}{6} \cdot 3^6 \cdot \text{cm}^6$$

lenne az eredmény?

5. Feladat: Elemezzük az alábbi függvénysorozat konvergenciáját!

$$f_n(x) := \frac{x}{1 + n^2 x^2}, \quad D_f = [0, 1], \quad n \in \mathbf{N}$$

A hallgatók nehezen tesznek különbséget a pontbeli, intervallumon pontonkénti, illetve az egyenletes konvergencia között!

Megoldás:

( $\alpha$ ) Nyilván:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1+n^2x^2} = 0$ , így  $f: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = 0$ .

$$\left| \frac{x}{1+n^2x^2} - 0 \right| = \frac{x}{1+n^2x^2} < \frac{x}{n^2x^2} = \frac{1}{n^2x}$$

Vizsgáljuk a küszöbszámot!

$$\left| \frac{1}{n^2x} - 0 \right| < \varepsilon, \quad x \neq 0, \quad \varepsilon \in \mathbf{R}^+$$

$$n > \sqrt{\frac{1}{x \cdot \varepsilon}} =: N(\varepsilon, x)$$

( $\beta$ ) Tehát ez a konvergencia teljesül,  $f_n(x) \rightarrow f(x) = 0$  pontonként.

Nem teljesül-e az egyenletes konvergencia is?!

$0 \leq f_n(x) = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2nx}{1+n^2x^2} \leq \frac{1}{2n}$ , mivel  $(nx - 1)^2 \geq 0$ . Ezzel  $f_n(x) - 0 < \varepsilon$ , ha  $n > N(\varepsilon)$ . Összefoglalva:  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$  egyenletesen konvergens, ahol  $f(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]$  esetén.

#### 4. Differenciálszámítás

Nem foglalkozunk azokkal a hibákkal, amelyekben a hallgatók nem tudják az elemi függvények deriváltjait, illetve hányaveti módon alkalmazzák a megismert deriválási szabályokat. Tipikus esetként megemlíjtük, hogy gyakran összetévesztik a hatványfüggvény és az exponenciális függvény fogalmát, ebből eredően ezek deriválását! Egy példa csak erre:

$$f: \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := 5^{\ln 2x}$$

Hibás megoldás:

$$f'(x) = \ln 2x \cdot 5^{(\ln 2x) - 1}$$

Jó megoldás:

$$f': \mathbf{R}^+ \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f'(x) = 5^{\ln 2x} \cdot \ln 5 \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2.$$



Külön kiemelheti a tanár, hogy a deriválást ezzel befejeztük, de célszerű a derivált függvény értékét a lehető legegyszerűbb alakban felírni. Egy példa erre:

$$f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := x + \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f'(x) = 1 + \frac{-1 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2} = \dots = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

1. Határozzuk meg az alábbi függvény derivált függvényét!

$$f: \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 1 - x, & \text{ha } -\infty < x < 1 \\ (1 - x)(2 - x), & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \\ -(2 - x), & \text{ha } 2 < x < +\infty \end{cases}$$

Megoldás: Nyilván, a probléma az  $x = 1$  és  $x = 2$  helyeken van, sok a tanácstalanság.

$$f(1) = 0 = f(2)$$

$$\lim_{n \rightarrow 1-0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{n \rightarrow 1-0} \frac{1 - x - 0}{x - 1} = -1 = f'_-(1)$$

$$\lim_{n \rightarrow 1+0} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_n \rightarrow 1 + 0 \frac{(1 - x)(2 - x) - 0}{x - 1} = -1 = f'_+(1)$$

Tehát létezik  $f'(1)$ , és  $f'(1) = -1$ . Hasonlóan belátható, hogy  $f'(2) = 1$ . Így

$$f' : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f'(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } x < 1 \\ 2x - 3, & \text{ha } 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{ha } 2 < x \end{cases}$$

[4]-95.o.

A tanárnak külön ki kell térnie a következő kérdések tisztázására:

- folytonos-e a függvény;
- deriválható-e a függvény (hol);
- a derivált függvény folytonos-e (hol)?

2. A formalizmus veszélyére figyelmeztet például a következő feladat:

$$f(x) := \ln \left( \ln \frac{1}{1 + x^2} \right).$$

Mivel egyenlő  $f'(x)$ ?

A képzelt megoldás, amelyik hibás:

$$f'(x) = \frac{1}{\ln \frac{1}{1+x^2}} \cdot (1+x^2) \cdot \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$f'$  az  $x = 0$  kivételével mindenütt  $(\mathbf{R} \setminus \{0\})$  értelmezhető, viszont  $D_f = \emptyset$ !

3. Egy érdekes feladat (Eulertől származik): Melyik a nagyobb:  $e^\pi$  vagy  $\pi^e$ ?

A hallgatók nem tudják, hogy matematikai rutin ismereteikhez hogyan kapcsolják ezt a kérdést.

Megoldás:

$$f: (0, +\infty) \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := x - e \cdot \ln x$$

$$f(e) = 0$$

$$f'(x) = 1 - \frac{e}{x} = \frac{x-e}{x}$$

$$f''(x) = \frac{e}{x^2}$$

Mivel  $f''(x) > 0$ , ezért  $f'$  növekvő!  $f'(e) = 0$

|    |             |  |
|----|-------------|--|
| Ha | $0 < x < e$ | : $f'(x) < 0$ ;  |
|    | $e < x$     | : $f'(x) > 0$ , tehát $f$ ekkor növekvő:<br>$f(x) > f(e)$ , azaz $x - e \cdot \ln x > 0$ |

|    |           |   |
|----|-----------|---|
| ha | $x = \pi$ | $\pi - e \cdot \ln \pi > 0$<br>$\pi > \ln \pi^e$<br>$e^\pi > \pi^e$ a válasz! |
|----|-----------|---|

Már dicséretet érdemel az, aki zsebszámológépével megvizsgálja a közelítő értékeket:

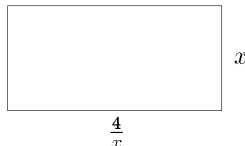
$$e^\pi \sim 23,1406,$$

$$\pi^e = 22,4591 \quad (\text{Aristo M 85.})$$

Ők is érzik azonban, hogy ez nem teljes megoldás, szükség van a fenti bizonyításra.

4. Feladat: A  $T = 4$  egység területű téglalapok közül melyiknek a legkisebb a kerülete?

Megoldás:



$x > 0$ ,  $\frac{4}{x} > 0$ . A kerület:  $k(x) = 2 \cdot (x + \frac{4}{x})$

A függvénydiszkusszió segítségével könnyű eldönteni, hogy ennek a függvénynek az  $x = 2$  értéknél van minimuma, azaz ha a téglalap négyzet.

A kiegészítő kérdéseknél kerülnek zavarba a hallgatók: — És melyiknek a kerülete a legnagyobb? Különböző, bár részigazságokat tartalmazó válaszok hangzanak el: „nem tudom megállapítani”, „bizonytalan”, „akármilyen lehet”, stb. Nem világos előttük, hogy a feladatot, a problémát megoldottam, ha azt mondom, hogy „nincs ilyen téglalap”, azaz a megoldás az, hogy nincs megoldás!

Segít a megértésben az, ha ábrázoljuk az  $y = k(x)$  síkgörbét a koordináta-rendszerben, vagy ha elemezzük a függvény határértékét:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} 2 \left( x + \frac{4}{x} \right) = +\infty$$

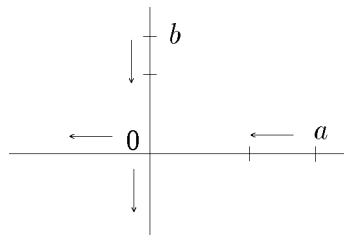
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \left( x + \frac{4}{x} \right) = +\infty$$

mivel a függvény folytonos a  $(0, +\infty)$ -on.

5. A függvények szélsőértékeinek deriválás segítségével történő meghatározásakor félreértés miatt érdekes problémával találkozott egy diák.

Feladat: Két, egymásra merőleges egyenesen egymás felé mozog egy-egy pont. Induláskor az első „a”, a második „b” távolságra van a két egyenes O metszéspontjától. Az első  $v_1 = 30 \frac{m}{s}$ , a második  $v_2 = 50 \frac{m}{s}$  egyenletes sebességgel halad. Mely időpillanatban lesznek a legközelebb egymáshoz?

Megoldás: (a) Ha a távolságot az egyenesek mentén értjük, a következő eredményre jutunk.



(α)  $t$  idő múlva a távolság:

$$y := f(t) = (a - 30t) + (b - 50t) = a + b - 80t$$

$$f'(t) = -80$$

Mivel  $f'(t) \neq 0$ , a függvénynek nincs szélsőértéke! (?)

(β) Tételezzük fel, hogy  $\frac{a}{30} > \frac{b}{50}$ ;  $\frac{b}{50} < t < \frac{a}{30}$ . Ha a második ( $b$ -ből) már

áthaladt O-n, az első még nem, akkor a közöttük lévő távolság  $t$  idő múlva:

$$y := g(t) = 50t - b + a - 30t = 20t + a - b.$$

Mivel  $g'(t) = 20 \neq 0$ , ekkor sem lehet szélsőértéke a függvénynek!(!)

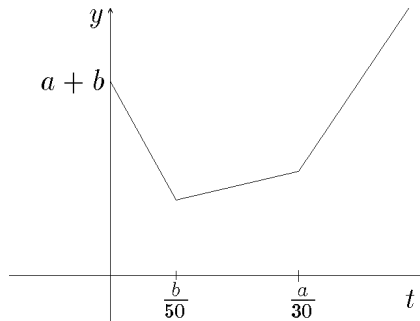
( $\gamma$ ) Ha mindkét pont áthaladt az O ponton ( $t > \frac{a}{30}$ ), a közöttük lévő távolság:

$$y := h(t) = 50t - b + 30t - a = 80t - a - b$$

$$h'(t) = 80 \neq 0$$

miatt ismét nem lehet a függvénynek szélsőértéke!(!)

Tehát  $\alpha, \beta, \gamma$  eset alapján nem létezik olyan időpont, amikor a két pont közötti távolság minimális? Ábrázoljuk a két pont közötti távolság grafikonját vázlatosan.



Ezen a rajzon  $y$ -nak mutatkozik minimuma a  $t = \frac{b}{50}$  időpillanatban! Mi lehet a probléma oka? Ez vezeti rá a hallgatókat arra, hogy vizsgálni kell a függvény  $(f(t), g(t), h(t))$  differenciálható-e a  $t = \frac{b}{50}$  és a  $t = \frac{a}{30}$  pontokban! Kiderül, hogy nem! Ettől függetlenül létezik minimuma és a feltétel miatt  $\frac{a}{30} > \frac{b}{50}$  a  $t = \frac{b}{50}$  pontban, ahol értéke:

$$t = a - \frac{3}{5}b.$$

Ez is illusztrálja, hogy az úgynevezett „töréspontokban”, „könyökpontokban”, sőt szakadási helyeken is lehet a függvénynek szélsőértéke, csak nem az adott pontbeli differenciálhányados segítségével kell és lehet ezt elemezni.

(b) Természetesen a valódi feladatot az

$$F(t) = \sqrt{(a - 30t)^2 + (b - 50t)^2}$$

függvény diszkussziójával lehet megoldani.

6. Feladat:  $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y) := |x| + |y| - |x + y|$ . Létezik-e a két parciális differenciálhányados a  $(0, 0)$  pontban, és ha igen, mivel egyenlőek?

Megoldás: Mivel a hallgatók megjegyezték, hogy az abszolútértékfüggvény a  $0$  pontban nem differenciálható, szinte automatikusan adják a választ: „ezek a parciális differenciálhányadosok nem léteznek”.

A helyes válasz az ellenkező, amelyet a definíció alkalmazásával sikerül belátnunk.

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| + |0| - |x + 0| - |0| - |0| + |0 + 0|}{x - 0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x| - |x|}{x} = 0. \end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

Megjegyzés: az  $f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x, y) := |x| + |y|$  függvény folytonos a  $(0, 0)$  pontban, de ott nem léteznek parciális deriváltjai ([2]-250. o.).

7. Feladat:

$$f: \mathbf{R} \times \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x, y) := \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = y = 0. \end{cases}$$

(a) folytonos-e a  $(0, 0)$  pontban?

(b)  $f$ -nek léteznek-e parciális differenciálhányadosai a  $(0, 0)$  pontban?

Megoldás: (a) Könnyű belátni, hogy  $f$  folytonos mindenütt, míg a problémás  $(0, 0)$  pontban nem. Alkalmazzuk például az átviteli elvet:

(a1) Ha  $y_n = 0$ ,  $x_n \rightarrow 0$ , akkor

$$f(x_n, y_n) = \frac{2x_n \cdot 0}{x_n^2 + 0} = 0$$

$$\lim_{\substack{x_n \rightarrow 0 \\ y_n = 0}} f(x_n, y_n) = 0.$$

Hasonlóan

$$\lim_{\substack{y_n \rightarrow 0 \\ x_n = 0}} f(x_n, y_n) = 0.$$

(a2) Ha  $x_n = y_n$ ,  $x_n \neq 0$ ,  $x_n \rightarrow 0$

$$f(x_n, y_n) = \frac{2x_n \cdot x_n}{x_n^2 + x_n^2} = 1$$

$$\lim_{x_n = y_n \rightarrow 0} f(x_n, y_n) = 1.$$

Mivel (a1) és (a2) nem egyezik meg, a függvény valóban nem folytonos a  $(0, 0)$ -ban.

- (b) Egyváltozós függvények esetében annak idején a hallgatók megtanulták, hogy a folytonosság szükséges feltétel egy adott  $x_0 \in D_f$  pontbeli differenciálhatósághoz. Ezért gyakran kapjuk a felületes választ erre a kérdésre: „mivel a függvény itt nem folytonos, nem is differenciálható parciálisan”. Pedig a helyes válasz:

$$f'_x(0, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x \cdot 0}{x^2 + 0} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x} = 0$$

Hasonlóan:

$$f'_y(0, 0) = 0.$$

## 5. Integrálszámítás

Miután megismerkednek bonyolult integrálási módszerekkel is, a hallgatók adott példa esetében hajlamosak a parciális integrálás, a helyettesítéssel való integrálás, vagy a racionális függvények integrálása módszereket erőltetni, feleslegesen ([7]—83. o.).

$$1. \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = ?$$

Megoldás:  $f(x) := \frac{1}{\ln x}$ ,  $g'(x) := \frac{1}{x}$ , innen  $f'(x) = -\frac{1}{x \ln^2 x}$ ,  $g(x) = \ln x$ . Így  $\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = 1 + \int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx$ . Mivel visszajutottunk az eredeti integrálra, tanácsstalanságukban abbahagyták a további próbálkozásokat.

A helyes megoldás:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx = \ln |\ln x| + C, \quad C \in \mathbf{R}.$$

$$2. \int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx = ?$$

Parciális integrálással próbálkozva:

$$g(x) := \frac{1}{\cos^2(x^2)}, \quad f'(x) = x$$

$$g'(x) = \frac{4x \cdot (\sin(x^2))}{\cos^3(x^2)}, \quad f(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Így  $\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2(x^2)} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{4x \cdot \sin(x^2)}{\cos^3(x^2)} dx$ . Ez a megoldás nem látszik célravezetőnek, mert egy új, bonyolultabb integrálra jutottunk.

A helyes megoldás:

$$\int \frac{x}{\cos^2(x^2)} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{2x}{\cos^2(x^2)} dx = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}(x^2) + C.$$

$$3. \int \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} dx = ?$$

Többen az integrált új változó bevezetésével, majd racionális függvény integrálására jutva próbálják kiszámítani.

$$t := e^x; \quad x = \ln t; \quad dx = \frac{1}{t} dt.$$

Ezzel

$$I = \int \frac{t + \frac{1}{t}}{t - \frac{1}{t}} \cdot \frac{1}{t} dt = \int \frac{t^2 + 1}{t(t^2 - 1)} dt.$$

Következik a parciális törtekre való bontás:

$$\frac{t^2 + 1}{t(t^2 - 1)} = \frac{A}{t} + \frac{B \cdot t + C}{t^2 - 1}, \quad A, B, C, \in \mathbf{R}.$$

Innen az ismert módon:  $A = -1$ ,  $B = 2$ ,  $C = 0$ . Így

$$\begin{aligned} I &= - \int \frac{1}{t} dt + \int \frac{2t}{t^2 - 1} dt = -\ln |t| + \ln |t^2 - 1| + C = \\ &= \ln \left| \frac{t^2 - 1}{t} \right| + C = \ln |e^x - e^{-x}| + C^*, \quad C^* \in \mathbf{R} \end{aligned}$$

Az eredmény jó, de sok a felesleges munka!

A rövidebb, de korrekt megoldás a következő. Alkalmazzuk az ismert szabályt:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

Tehát

$$I = \ln |e^x - e^{-x}| + C.$$

Ugyancsak meglepi a hallgatókat, hogy egy kis figyelmesség milyen frappáns lehetőséget ad a sikerhez.

$$4. \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = ?$$

Sokan helyettesítéssel oldják meg a feladatot.  $\sin z := x$ ;  $dx = \cos z \cdot dz$ .

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \frac{\sin z}{\cos z} \cdot \cos z \cdot dz = \int \sin z dz =$$

$$= -\cos z + C = -\sqrt{1 - \sin^2 z} + C = -\sqrt{1 - x^2} + C, \quad C \in \mathbf{R}.$$

Kis odafigyeléssel sokkal elegánsabban megkapjuk ugyanezt a helyes eredményt!

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot x dx = -\frac{1}{2} \int (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) dx = \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{+\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = -(1-x^2)^{+\frac{1}{2}} + C = -\sqrt{1-x^2} + C. \end{aligned}$$

$$5. \int \frac{x}{e^x} dx = ?$$

Mivel a hallgatók ismerik, vagy meg fogják ismerni, hogy az  $\int \frac{e^x}{x} dx$  integrál nem elemi függvény, mechanikusan válaszolják, ez sem az! Pedig a megoldás parciálisan integrálva:

$$\int \frac{x}{e^x} dx = \int x \cdot e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C, \quad C \in \mathbf{R}$$

$$f(x) := x \quad g'(x) = e^{-x}$$

$$f'(x) = 1 \quad g(x) = -e^{-x}$$

Egy függvény Riemann-integrálhatósága és primitív függvényének létezése sok nyitott kérdés tisztázását teszi szükségessé a hallgatók előtt.

## 6. Legyen

$$F: [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

és

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$F'(x) = 2x \cdot \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cdot \cos \frac{1}{x^2}, \quad \text{ha } x \neq 0$$

$$F'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x^2} - 0}{x - 0} = 0, \quad \text{ha } x = 0$$

$$f := F'$$

Így  $f$ -nek  $F$  primitív függvénye, de  $f$  nem Riemann-integrálható, mert nem korlátos. Nehezebben ugyan, de lehet konstruálni olyan  $f$  függvényt is, amelynek egy  $[a, b]$ -ban van primitív függvénye, korlátos, mégsem Riemann-integrálható ([8], 295. o.).



7. Létezik olyan  $f$  függvény, amelyik Riemann-integrálható valamely  $[a, b]$ -on és integrálfüggvénye differenciálható, de nincs primitív függvénye. Például:

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := \operatorname{sign}^2 x$$

Az  $f$  korlátos, egy hely kivételével folytonos, tehát Riemann-integrálható, ugyanakkor nincs primitív függvénye ([8], 77. o.).

8. Ha az  $f$  függvény Riemann-integrálható és létezik primitív függvénye az  $[a, b]$ -on, következik ebből, hogy  $f$  folytonos  $[a, b]$ -on?

Megoldás: nem!

Legyen

$$f: [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad f(x) := \begin{cases} 2x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

( $\alpha$ )  $f$  az  $x = 0$  pontban nem folytonos

( $\beta$ )  $f$  korlátos, és egy hely kivételével folytonos, tehát Riemann-integrálható

( $\gamma$ )  $f$ -nek van primitív függvénye is:

$$F: [-1, 1] \longrightarrow \mathbf{R}, \quad F(x) := \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{ha } x \neq 0, \\ 0, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

9. Az integrálás során problémát okoz, ha például a forgástest térfogatát az  $x$  tengely, illetve az  $y$  tengely körüli forgatás esetében számoljuk.

Feladat: Az  $y = x^{\frac{3}{2}}$  Neil-féle „szemikubikus parabolát” az  $x \in [0, a]$  intervallumon megforgatjuk mindkét tengely körül. Létezik-e olyan  $a \in \mathbf{R}^+$ , amelyre a két forgástest térfogata egyenlő?

Megoldás:

$$V_x[0, a] = \pi \cdot \int_0^a x^3 dx = \pi \cdot \frac{a^4}{4}$$

A hiba itt következik, mert a  $V_y$  számításakor is ugyanezen integrálási határokat vesszük:

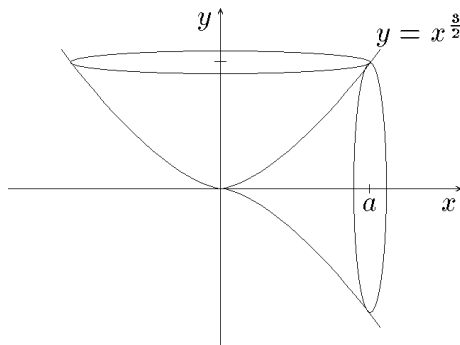
$$V_y = \pi \cdot \int_0^a x^2 \cdot dy \quad (?)$$

Helyesen:

$$V_y[0, f(a)] = \pi \cdot \int_0^{a^{\frac{3}{2}}} x^2 dy = \pi \cdot \int_0^{a^{\frac{3}{2}}} y^{\frac{4}{3}} dy = \frac{3}{7} \cdot \pi \cdot a^{\frac{7}{2}}$$

$V_x[0, a] = V_y[0, a^{\frac{3}{2}}]$  teljesül, ha  $\pi \cdot \frac{a^4}{4} = \frac{3}{7} \pi \cdot a^{\frac{7}{2}}$ . Tekintsünk el a triviális  $a = 0$  esettől. Mivel  $a \neq 0$ , a megoldás:  $a = \frac{144}{49}$  ([4], 199. o.).

Rajzban:



10. Az integrálási módszerek ismertetése során kitérünk arra, hogy vannak olyan függvények, amelyeknek nincs primitív függvényük, például:

$$\int \frac{e^x}{x} dx; \quad \int \frac{\sin x}{x} dx; \quad \int \frac{1}{\ln x} dx \quad \dots ([1], 306. \text{ o.})$$

Viszont érdekesség céljából megemlítjük, hogy itt is lehetőség van az elemi függvények körének kibővítésére. Az  $\int \frac{1}{\ln x} dx$  függvényt — amely a matematika különböző fejezeteiben gyakran előforduló függvény — szokás integrál logaritmus függvénynek nevezni, és értékét  $Li(x)$ -szel jelölni. De azzal, hogy a

$$Li(x) := \int \frac{1}{\ln x} dx$$

jelölést használjuk, nem válik az integrál kiszámítása egyszerűbbé, csak egyszerűbben jelölhetővé.

Hasonlóan  $\int \frac{\sin x}{x} dx$  legyen az integrál szinusz függvény, és jelölése:

$$Si(x) := \int \frac{\sin x}{x} dx.$$

„Felvetődik a kérdés: adott elemi függvényről hogyan lehet eldönteni, hogy primitív függvénye elemi függvény vagy sem? Pontosabban megfogalmazva: olyan eljárást keresünk, amelynek alkalmazásával tetszőleges elemi függvényre a fenti kérdés véges sok lépésben megválaszolható. Egy nem egészen 10 éves eredmény szerint (a jegyzet 1977-ben íródott) ilyen eljárás nem létezik! Ehhez természetesen szükség van az eljárás, vagy más szóval algoritmus fogalmának precíz meghatározására. Szemléletesen olyan eljárásokról lehet itt szó, amelyek számítógéppel (mégpedig

„ideális”, azaz végtelen memóriájú számítógéppel) elvégezhetők” ([8], 104. o.). Ugyanakkor megadott intervallumon létezik Riemann-integrálja a függvénynek, mert például azon folytonos:

$$\int_1^5 \frac{e^x}{x} dx,$$

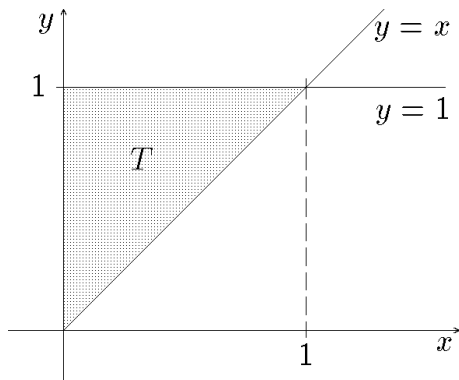
de ezek szerint nem számítható ki a Newton—Leibniz-formulával, csak közelítő módszerekkel.

11. Példa: számítsuk ki a következő kettős integrált az adott  $T$  tartományon:

$$f(x, y) := \frac{x \cdot \sin y}{y}; \quad D_f := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2, y \neq 0\}$$

$$T := \{(x, y) \in \mathbf{R} : 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

Szemléltessük a  $T$  tartományt:



$f$  folytonos a  $T$ -ben a  $(0, 0)$  pont kivételével, de korlátos, így integrálható a  $T$  normál tartományon.

$$I = \int_0^1 \left( \int_x^1 \frac{x \cdot \sin y}{y} dy \right) dx = \int_0^1 x \cdot \left( \int_x^1 \frac{\sin y}{y} dy \right) dx$$

Érdeklődést kelt a hallgatók körében, hogy az integrálás sorrendjének felcserélésével eredményre jutunk.

$$I = \int_0^1 \left( \int_x^1 \frac{x \cdot \sin y}{y} dy \right) dx = \int_0^1 \left( \int_0^y \frac{x \cdot \sin y}{y} dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin y}{y} \left( \int_0^y x dx \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^1 y \cdot \sin y dy$$

Parciálisan integrálva:

$$I = \frac{\sin 1 - \cos 1}{2}$$

Még itt is sokan tanácstalanok! Mivel egyenlő a  $\sin 1$ ? Sajnos gyakran kapjuk a választ, hogy  $\frac{\pi}{2}$ -vel, vagy  $\sin 1^\circ$ -kal!

### Irodalom

- [1] BANACH, S.: Differenciál- és integrál-számítás. Tankönyvkiadó, Szeged, 1964.
- [2] CSÁSZÁR Á., Valós analízis I. Tankönyvkiadó, Budapest, 1983.
- [3] GYEMIDOVICS, B. P.: Matematikai analízis feladatgyűjtemény. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- [4] FAZEKAS F.: Határozott integrál A.V\* (egyetemi segédkönyv). Tankönyvkiadó, Budapest, 1954.
- [5] RIMÁN J.: Matematikai analízis I. EKTF Líceum Kiadó, Eger, 1998.
- [6] RIMÁN J.: Matematikai analízis feladatgyűjtemény I—II. Tankönyvkiadó, Budapest, 1992.
- [7] TUPIKOV, V. A.: Osibki v resenii zádács po vizszej matematike, Viszsaja Skola, Minszk, 1976.
- [8] T. SÓS VERA: Analízis I/2. Integrál-számítás. ELTE TTK Tankönyvkiadó, Budapest, 1977.
- [9] RADOS M. : A matematikai analízis oktatása során tapasztalt problémákról és hibákról I., Acta Acad. Paed. Agriensis, Sect. Math. 26 (1999), 115-120.

**Rados Mihály**

Institute of Mathematics and Informatics

Eszterházy Károly College

Leányka str. 4–6.

H-3300 Eger, Hungary

## HEVES MEGYEI HELYZETKÉP AZ ÁLTALÁNOS ISKOLÁSOK MATEMATIKAI TUDÁSSZINTJE MÉRÉSÉNEK ÉS ÉRTÉKELÉSÉNEK NÉHÁNY KÉRDÉSÉRŐL

Szepessy Bálint (Eger, Hungary)

**Abstract.** The paper summarizes the results of an investigation held in Heves County of Hungary, where the mathematical knowledge of students (age: 10–14 years) was measured.

### 1. A téma választásáról

A pedagógiai értékelés fontos mozzanata a tanítási-tanulási folyamatnak. A résztvevők számára nélkülözhetetlen információkat jelent, a visszacsatolás funkcióját látja el, kihat a rendszer működésére szabályozó szerepével áthatja, behálózza azt.

Az értékelés során az információszerzés mérési módszerek alkalmazásával tehető teljesebbé, objektívebbé.

Az utóbbi időben a pedagógiai gyakorlatban előtérbe került az objektív értékelésre való törekvés; egyre nagyobb az igény — az általános iskolákban is — a mérési módszerek alkalmazására.

Ennek okai a következők:

- Az oktatási törvény is tartalmazza, megfogalmazza a vizsgarendszer bevezetését.
- A Nemzeti Alaptanterv szerint készült helyi tantervek is általában felhívják a figyelmet a belső értékelési rendszerrel kapcsolatos ismeretek elsajátítására, alkalmazására.
- Az 1998–99-es tanévben elkészült és elfogadott helyi pedagógiai programok beválásának a vizsgálata.
- A minőségbiztosítás előtérbe kerülése.
- A létrejött 6 és 8 osztályos gimnáziumok; a csökkenő gyerekszám az általános iskolákat is új programok, speciális szolgáltatások bevezetésére kényszeríti. Egyre nagyobb a verseny a tanulókért. Az általános iskolák érdeke, hogy az iskolából kikerülő tanulók tudásszintjét mérje, bizonyítsa felkészültségüket.

Az okok alapján — amely korántsem teljes — megnövekedett igény indokolja különösen a pedagógusok számára a tudásszint és értékelés mérési módszereinek a megismerését és helyes alkalmazását. Bár egyre több irodalom foglalkozik a témával ([1]–[4]), a pedagógiai gyakorlatban — megítélésünk szerint — nem kap kellő hangsúlyt.

Ezek a gondolatok adták az ötletet, hogy megvizsgáljuk Heves megyében az általános iskolai matematikatanárok értékelési módszereit.

## 2. A vizsgálat célja

A vizsgálat célja: információgyűjtés és ennek alapján helyzetkép készítése Heves megye általános iskoláiban matematikát tanító tanárok tudásszint és értékelés mérési módszereinek alkalmazásáról, a pedagógusok ehhez szükséges elméleti felkészültségéről. A vizsgálat eredménye segítséget adhat — a szóban forgó területen — a problémák feltárásához, a pedagógusok szakmai és módszertani képzésének és továbbképzésének reális igényeket kielégítő megtervezéséhez, valamint módszertani anyagok készítéséhez.

## 3. A vizsgálat tárgya, módszere

A vizsgálat a következő kérdésekre terjedt ki:

- (a) Az értékelés funkciói, a mérési módszerek alkalmazása, mérőeszközök készítése, értékelése matematika órákon.
- (b) Az értékelési módszerek bevezetésének a megítélése, lehetőségei. Az értékelésbe külső szakemberek bevonásának és az eredmények nyilvánossághozzásának megítélése.
- (c) Az értékelés területén a segítségnyújtás igényének és lehetőségeinek a feltárása.

A vizsgálat módszere, résztvevői: kérdőíves adatgyűjtés és elemzés reprezentatív mintavétel alapján Heves megye általános iskoláinak felső tagozatán matematikát tanító tanárok körében.

A mintát azért választottuk az említett populációból, mert

- a közoktatási törvény alapján az alapképzés jellemző intézménye a 8 osztályos általános iskola,
- a közoktatási törvény tervezett módosítása is ezt az iskolatípust kívánja megerősíteni,
- Heves megyében is ez a meghatározó iskolatípus, a pedagógusok döntő többsége is ilyen iskolatípusban tanít.

A megyében 125 általános iskola van (nem számítva a speciális iskolákat), 400 általános iskolai tanár tanít matematikát az iskolák felső tagozatán.

28 iskolába 84 kérdőívet küldtünk ki (önkéntes kitöltésre); ebből kitöltve visszaérkezett 59. Ez a populáció 14,4%-a.

## A válaszoló pedagógusok megoszlása tanulói létszám alapján

| Tanulói<br>létszám | Iskolák<br>száma | Kiküldött<br>kérdőívek<br>száma | Visszaküldött<br>kérdőívek<br>száma | Visszaküldött<br>kérdőívek<br>%-ban |
|--------------------|------------------|---------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 200 fő alatt       | 8                | 16                              | 12                                  | 75 %                                |
| 200—500 fő         | 16               | 48                              | 31                                  | 65 %                                |
| 500 fő felett      | 4                | 20                              | 16                                  | 80 %                                |
| Összesen           | 28               | 84                              | 59                                  | 73 %                                |

Az iskolák összetétele, a tanulók számának a feltüntetése azt mutatja, hogy a minta reprezentálja a populációt.

#### 4. A kérdések, a felmérés eredménye

Ismertnek tekintettük a tanulókra és a tanítási folyamatra irányuló pedagógiai értékelés jellemzőinek, szintjeinek, típusainak; valamint a feladatlapok és a tesztek készítésének és alkalmazásának elméleti és metodikai ismereteit ([1]—[4]).

Ezekből kiemeljük, hogy az értékelés módszere, eljárása eltérő lehet, attól függően, hogy mi az értékelés funkciója. Három funkciót különböztetünk meg: a helyzetfeltáró vagy diagnosztikus; a formáló vagy formatív és egy relatív végállapot eredményeinek a megállapítására vonatkozó; lezáró-minősítő vagy szummatív értékelést. A kérdőíven ezekre vonatkozóan a következő kérdések szerepeltek:

##### 1. A tanév elején felméri-e a tanulók tudását?

Igen — Nem

##### Ha igen, hogyan értékeli?

- csak osztályzattal
- osztályzattal és megbeszéli a tanulókkal a hiányosságokat
- nem osztályozza, nem beszél meg a tanulókkal, önmagának jelzés
- nem osztályozza, a hiányosságokat megbeszéli a tanulókkal

##### 2. Egy-egy témakör tanítása előtt felméri-e a tanulók előzetes ismereteit?

Igen — Nem

##### Ha igen, hogyan értékeli?

- csak osztályzattal
- osztályzattal és megbeszéli a tanulókkal a hiányosságokat
- nem osztályozza, nem beszél meg a tanulókkal, önmagának jelzés

- nem osztályozza, a hiányosságokat megbeszéli a tanulókkal

**3. Egy-egy témakör tanítása közben, ha dolgozatot írat, osztályoz minden felmérést?**

Igen                      —                      Nem

**Ha igen, miért?**

.....

**4. A témazáró dolgozatokat a tankönyvkiadók feladatlapjaiba íratja?**

- Igen
- Nem, mert a színvonala nem felel meg
- Miért?

.....

- Részben kiegészítem saját feladataimmal

**5. Ha nem a tankönyvkiadók által készített feladatlapokat használja, alkalmazza, akkor:**

- Ön állítja össze a feladatot
- A tankönyv tudáspróba feladatait alkalmazza

**6. (a) A feladatsorokat pontozással javítja?**

Igen                      —                      Nem

**(b) Ha igen, kérem írja le, hogyan váltja át a pontokat érdemjeggyé!**

.....

.....

**7. Az Ön által készített feladatlapok esetén, mikor tervezi meg a feladatok értékelését?**

**(a)**

- a feladatlap készítéssel egyidőben
  - javítás előtt
  - javítás közben alakul ki

**(b) a pontozás kialakításakor**

- tapasztalatra épít
- követelményekhez igazodik
- egyéb

**(c) Hogyan pontoz:**

- itemekre bontja a megoldást és ezeket pontozza
- csak a jó eredményt fogadja el
- egyéb



## 8. A hiányosságok pótlására beiktat-e újabb órákat?

- igen
- nem, mert zsúfolt a tananyag, nincs rá idő
- nem, pótolják be otthon a hiányosságokat

A **diagnosztikus értékelés** a tanulók „induló” tudásának a feltárása azért, hogy megtudjuk, milyen meglévő tudásra építhetünk, mennyire rendelkeznek a tanulók azokkal az ismeretekkel és képességekkel, amelyekre a tantárgy tanév eleji tanításának megkezdésekor vagy egy tantervi tematikus egység előtt, vagy egy új iskolatípusban támaszkodhatunk. Ezt az értékelést tehát a tanulási folyamatban a tanév elején vagy egy nagyobb tanítási egység elején alkalmazzuk. Az értékelésnek ebben a szakaszában nem osztályozzuk a teljesítményt; mert ekkor a cél az ismeretek felmérése, kiegészítése, a képességek fejlesztése. A felmérés során arról próbáltunk információt gyűjteni, hogy milyen gyakorisággal alkalmazzák a diagnosztikus értékelést, minősítik-e (osztályozzák-e) a feladatlapokat, megbeszélnek-e a tanulókkal a hiányosságokat?

A mérés eredménye a következő:

A tanév elején feladatlapon felméri a tanulók előzetes tudását:

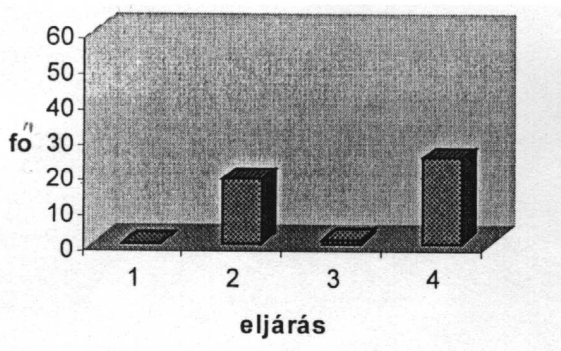
|                            | fő | százalék |
|----------------------------|----|----------|
| 1.Elvégzi a felmérést      | 42 | 72%      |
| 2.Nem végzi el a felmérést | 12 | 20%      |
| 3.Nem válaszolt a kérdésre | 5  | 8%       |

Hogyan értékeli a felmérést?

1. — csak osztályzattal,
2. — osztályzattal és megbeszéli a tanulókkal a hiányosságokat,
3. — nem osztályozza, nem beszél meg a tanulókkal, önmagának jelzés,
4. — nem osztályozza, megbeszéli a tanulókkal a hiányosságokat.

Az első eljárást senki sem, a másodikat 18, a harmadikat 1, a negyediket 24 fő választotta.

| Eljárás | fő | százalék |
|---------|----|----------|
| 1.      | 0  | 0%       |
| 2.      | 18 | 31%      |
| 3.      | 1  | 2%       |
| 4.      | 24 | 41%      |



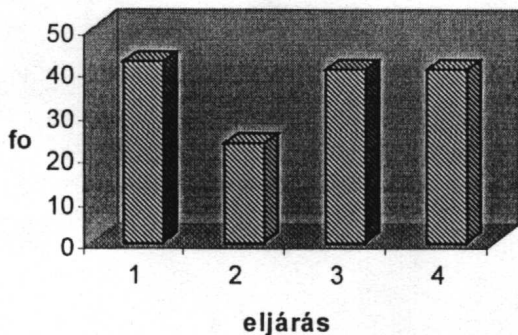
A tanulók előzetes tudásának tanév eleji értékelése méréses módszerekkel elfogadott a pedagógiai gyakorlatban. Ezt a minta eredménye is bizonyítja. A válaszoló 59 pedagógusból 42 megírta ezt a felmérést; ez a minta 72%-a. Az viszont meglepő, hogy 31%-uk osztályozza is a felmérést és megbeszéli a tanulókkal a hiányosságokat. A válaszadók 42%-a nem osztályoz és egy kivételével megbeszéli a tanulókkal a teljesítményüket.

Egy-egy témakör feldolgozása előtt a tanulók tudását felméri:

|      | fő | százalék |
|------|----|----------|
| Igen | 40 | 68 %     |
| Nem  | 19 | 32 %     |

Mind a 40 fő fontosnak tartja a hiányosságok megszüntetését.

Összegezve a diagnosztikai értékelés alkalmazása a következő képet mutatja:



1. — tanév elején készít felmérést

2. — helyesen alkalmazza (nem osztályozza)
3. — egy-egy témakör előtt készít felmérést
4. — helyesen alkalmazza, az elsajátítás szintjét méri

A **formatív értékelés** a tanítási-tanulási folyamat állandó kísérője, az eredményes tanítás segítője. Ez a mérés a tanulónak arról ad információt, hogy meddig jutott el; a tanárt pedig tájékoztatja, hogy mit tanított meg elég hatékonyan, mit nem tanított meg jól. Ez az értékelés nem minősít, hanem fejleszt és korrigál. Eredményei nem befolyásolják közvetlenül a minősítő értékelést.

Mi az utóbbi kritériumot vizsgáltuk a formatív értékelés gyakorlati alkalmazása során.

Természetesen a tanárok az egyes témakörök tanítása közben felmérik, hogy a követelményszinthez viszonyítva hol tartanak a tanulók; de hogyan értékelik, osztályozzák-e minden esetben a feladatlapokat, tesztek, a hiányosságok pótlására fordítanak-e időt?

Eredmény: mind az 59 pedagógus valamennyi mérést osztályoz.

A diagnosztikus és a fejlesztő értékelés minősítésére vonatkozó adatok azt mutatják, hogy az értékelés osztályozás-centrikus, ami nem biztos, hogy a tananyag elsajátításának a folyamatát hatékonyan segíti. Az azonban megnyugtató, hogy a tanárok 93%-a nem halad tovább az új anyag feldolgozásával a hiányosságok pótlása előtt.

A válaszadók 3%-a a zsúfolt tananyagra való hivatkozással nem iktat be órákat a hiányosságok pótlására; figyelmen kívül hagyva, hogy felszínes tudásra nem lehet új ismereteket eredményesen építeni.

A **szummatív** vagy minősítő **értékelés** során globális képet nyerünk a tanulókról; hogy milyen szinten tettek eleget a tanulási követelményeknek. Ezt az értékelést a tanítási-tanulási folyamat nagyobb szakaszainak (témakör, tanév) lezárásakor alkalmazzák. Természetesnek vettük, hogy a lezáró minősítés szerves része az oktatási gyakorlatnak. A vizsgálatunk arra terjedt ki, hogy ennek az értékelésnek az alkalmazásakor milyen mérőeszközöket (feladatlapokat, tesztek) használnak és milyen módszerekkel értékelik azokat (5.-7. kérdés).

### Mérőeszközök készítése, alkalmazása, értékelése

A témazáró dolgozatokat a tankönyvkiadó feladatlapjaiba íratja 14 fő (24%). Nem íratja a feladatlapokra 8 fő (14%), mert — szerintük — a tanulók megszerzik a helyes válaszokat és úgy nem a reális tudást tükrözi. 37 válasz (62%) a tankönyvkiadó feladatlapjait egészíti ki a saját feladataival.

A tanárok 14%-a önállóan készíti a feladatlapokat és azokból szerkeszti a tesztek. (Hasznos lenne megvizsgálni az elkészített tesztek érvényességét, megbízhatóságát.)

A feladatlapokat pontozással javítja a válaszoló tanárok 98%-a. Az értékelést, a pontozás megtervezését a következő táblázat mutatja:

|  | fő | százalék |
|--|----|----------|
| A feladatlap elkészítésével egy időben tervezi meg | 55 | 93%      |
| Közvetlen javítás előtt tervezi meg                | 3  | 5%       |
| Javítás közben alakítja ki                         | 1  | 2%       |

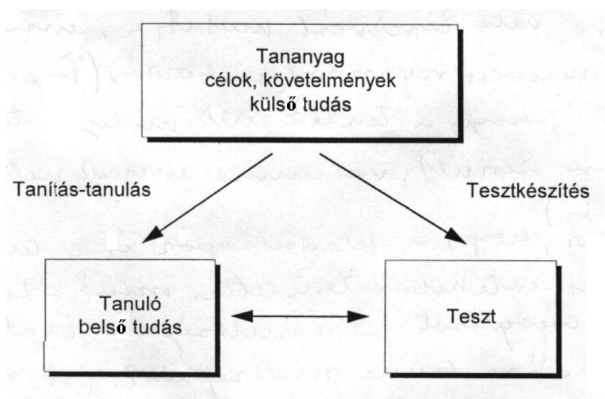
A pontozás kialakításakor a következő szempontokat veszik figyelembe

|                                     | fő | százalék |
|-------------------------------------|----|----------|
| Saját tapasztalatra épít            | 2  | 3%       |
| A követelményrendszert veszi alapul | 57 | 97%      |

A tanítás során alkalmazott logikai lépésekre bontja a feladatokat és a részeredményeket is pontozza a válaszadók 100%-a.

A pedagógusok jelentős százalékának értékelési eljárása megfelel a kritériumoknak. A feladatlap-készítéssel egy időben, a követelményrendszerhez igazodva és logikai lépésekre bontva pontozzák a feladatokat.

A pedagógiai tesztek lehetnek norma- vagy kritérium orientáltak. Kis mintára (pl. egy osztály) kritérium-orientált tesztet lehet készíteni. A kritérium a követelményrendszer. A teszt készítésének és értékelésének a követelményekből kell kiindulni és ugyanazokat a logikai lépéseket kell követni, amit a tanítás során alkalmaz a nevelő.



A kialakított pontozás után a ponthatárok megállapítása történik, amelyeket érdemjeggyé váltanak. Mérésünk szerint a ponthatárok kialakításánál és az azokhoz

rendelt osztályzatok megállapításánál a nehézségi foktól függetlenül ugyanazt az elvet alkalmazzák.

A pontok osztályzattá alakítását a következő táblázat mutatja:

|         |           |
|---------|-----------|
| 0—29%   | elégtelen |
| 30—49%  | elégséges |
| 50—74%  | közepes   |
| 75—89%  | jó        |
| 90%-tól | jeles     |

Egységesebb és realisabb lenne az értékelés, ha a helyi programban megfogalmazott követelmények alapján a Hajdu Sándor-féle feladatlap-értékelési módszert követnék. Az értékelés pontozásos módja az objektivitásra való törekvést mutatja, de nem szabad mereven ragaszkodni hozzá. (Figyelembe kell venni, hogy a teszt milyen tudás mérésére készült, valamint annak nehézségi fokát is).

Ahhoz, hogy a feladatlapok és a tesztek készítése és értékelése területén minősíteni lehessen a pedagógusok felkészültségét, jóval több információra lenne szükségünk. (A vizsgálat célja helyzetkép készítés, nem minősítés!)

Az viszont figyelemre méltó, hogy — ezen a területen — hogyan vélekednek a tanárok a saját felkészültségükről.

Kérdésünk a következő volt:

### 9. Hogyan ítéli meg Ön saját felkészültségét?

#### • tesztkészítés, feladatlap-összeállítás témakörben

jó                      közepes                      gyenge

#### • feladatok értékelésének témakörében

jó                      közepes                      gyenge

A válaszok alapján készültek a következő táblázatok:

A tesztkészítés területén:

|                           |     |
|---------------------------|-----|
| jónak ítéli meg a tudását | 90% |
| közepesnek tartja         | 8%  |
| gyengének ítéli           | 0%  |
| nem válaszolt             | 2%  |

A teszt értékelése területén

|                         |       |
|-------------------------|-------|
| jónak ítéli meg tudását | 88,2% |
| közepesnek tartja       | 8,4%  |
| gyengének ítéli         | 0%    |
| nem válaszolt           | 3,4%  |

Végül megkérdeztük:

**10. Egyetért-e azzal, hogy külső szakemberek tudásszintmérést végezzenek matematikából?**

**IGEN — NEM**

Miért?

.....  
 .....

**11. Fontosnak tartja, hogy legyenek olyan feladatsor-variánsok, amelyek eredményeit össze tudja hasonlítani tanítványai eredményeivel?**

- Országos összehasonlító adatok: igen — nem
- Megyei összehasonlító adatok: igen — nem

Miért?

.....

A válaszadók 69,5%-a fogadja el a külső, nem az iskolában dolgozó szakemberek tudásszintmérését; 28,8%-a viszont elutasítja. Az igennel válaszolóknak csak az 53,4%-a indokolja válaszát az objektív megítéléssel, az elfogulatlan visszajelzéssel, viszonyítási lehetőséggel. Az tapasztalható, hogy az elmúlt évek szakmai ellenőrzésének teljes hiánya miatt az iskolák, a pedagógusok túlságosan bezárkoztak.

Figyelembe véve, hogy a NAT minden tanulóra vonatkozóan megfogalmazza a minimum követelményeket meglepő, hogy a külső szakemberek mérésének elutasítását legtöbbször azzal indokolták, hogy a külső szakemberek nem ismerik a gyerekek képességeit; így nem születhetne reális eredmény.

Az utolsó kérdésre a válaszok:

- Országos összehasonlító adatokat igényel a válaszadók 89,8%-a; nem igényel 10,2%-a.
- Megyei összehasonlító adatokat 83% igényel; 17% nem.

Az összehasonlító adatokat igénylők 58%-a azzal indokolta döntését, hogy ez jó összehasonlítási, viszonyítási, illetve tájékozódási lehetőség.

A kapott helyzetkép mélyebb elemzése nélkül is — megfogalmazhatók a következő feladatok:

- a képzés során a legkorszerűbb, legeredményesebb értékelési módszerek megismertetése,

- továbbképzéseken az elméleti alapok megerősítése után a gyakorlati alkalmazást kell előtérbe helyezni;
- a gyakorlatban alkalmazott feladatlapok és tesztek érvényességének, „jóságának” feltárása,
- megfelelő jószágmutatókkal rendelkező feladatsorok, tesztek készítése és közreadása,
- ellenőrzéssel, tanácsadással oldani szükséges a mérésektől való félelemet.

A helyzetkép további felmérésekkel élesíthető. (Ezek folyamatban vannak.) Ezután következhet az elemzés, az értékelés különböző területein meglévő problémák feltárására, a megoldásukra vonatkozó további feladatok megfogalmazása.

### Irodalom

- [1] CSAPÓ BENŐ: Az iskolai tudás. Osiris Kiadó, Budapest 1998.
- [2] OROSZ SÁNDOR: Mérések a pedagógiában. Veszprém, 1995.
- [3] BÁTHORY ZOLTÁN: Tanulók, iskolák, különbségek. Okker Kiadó, Budapest, 1997.
- [4] TÓTH TIBORNÉ—TÓTH ANDREA ÉVA: Értékelés és minőség a közoktatásban. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1999.
- [5] ÁGOSTON—NAGY—OROSZ: Mérési módszerek a pedagógiában. Tankönyvkiadó, Budapest, 1974.
- [6] NAGY JÓZSEF: Értékelési kritériumok és módszerek. *Pedagógiai Diagnosztika*, **2**, (1993).
- [7] A közoktatásról szóló 1993 évi LXXIX törvény módosításokkal együttes szerkezetbe foglalt szövege. *Művelődésügyi Közlöny*, **25**, 1498—1571.

### Szepessy Bálint

Institute of Mathematics and Informatics  
Eszterházy Károly College  
Leányka str. 4–6.  
H-3300 Eger, Hungary





## MATEMATIKATANULÁSI NEHÉZSÉGEK, DISZKALKULIA

Szilák Aladárné (Eger, Hungary)

**Abstract.** The essay deals with a short description of discalculiation, demonstrates and analyses a pedagogical test and emphasizes the typical mistakes of 10–16 years old students.

### 1. A téma választásáról

Korunk fejlődése olyan iskola létrehozását teszi szükségessé, amely a sikeresen elvégzőknél alapvető készségeket, képességeket, jártasságokat alakít ki, melyek az ismeretszerzés eszközeként szerepelnek a további tanulás során, továbbá azt az ismeretanyagot nyújtja, amely alkalmassá teszi birtokosát a különböző szakmák elsajátítására, magasabb szintű továbbtanulásra, önképzésre, a társadalmi életben való eligazodásra. Számos esetben tapasztaltuk azonban hospitálások alkalmával, hallottuk gyakorló tanárokkal, hallgatókkal történő konzultáción, hogy az iskoláskorú (10–16 éves) tanulók egy része különböző okok miatt nem képes a tantervi anyag minimumát sem elsajátítani matematikából. Ezek a gyerekek valószínűleg matematikatanulási nehézségekkel küzdenek, és hogy ezeket a problémákat le tudják küzdeni, feltétlenül tartós segítségre szorulnak. A matematikatanár az, aki a nehézségeket elsőként diagnosztizálni tudja és amennyiben lehetősége van rá, ő az, aki elsőként segítséget nyújthat.

Az utóbbi években a matematika szakos hallgatók matematika didaktika (matematika tantárgypedagógia) keretein belül jutottak olyan ismeretekhez, amelyek a fenti problémák felismerését, terápiáját segítik. Irányításunkkal több szakdolgozónk részletesebben foglalkozott a diszkalkuliás tanulók pedagógiai vizsgálatával, fejlesztő foglalkozások tervezésével, kipróbálásával.

A tanárjelöltek felkészítése és a gyakorló matematikatanárok továbbképzése ezen a területen egyre több olyan feladat elé állítja a matematika tantárgypedagógiát, amelyeket meg kell oldani.

E tanulmányban a diszkalkulia lényegének rövid leírásával, matematika szakos főiskolai hallgatóink által elkészített pedagógiai vizsgálati tesztrészlet bemutatásával, elemzésével, a felső tagozatos (köztük a diszkalkuliás) tanulók jellegzetes hibáival foglalkozunk.

## 2. A diszkalkuliáról

### (a) A diszkalkulia értelmezése:

A diszkalkulia olyan tanulási zavar, amely a matematikai fogalmak, műveletek, eljárások elsajátítása és alkalmazása során jelentkezik.

A szakirodalomban többféle értelmezésével találkozhatunk. Mesterházi Zsuzsa a „Diszkalkuliáról pedagógusoknak” (Szerkesztette: Mesterházi Zsuzsa) című kiadványban így fogalmaz:

„Diszkalkuliának tekintjük azokat a matematikatanulási nehézségeket, amelyek különböző intelligenciaszint mellett a matematika bármely témakörének tanulásakor rendszeresen ismétlődő eredménytelenségekben, vagy tartósan nagyon alacsony szintű teljesítményekben mutatkoznak meg.” [5]

Bóddor Jenő A diszkalkulia pszichológiája című tanulmányában neuropszichológiai oldalról is megközelíti a diszkalkulia fogalmát:

„Azokat a tanulókat tekintjük diszkalkuliásoknak, akiknél olyan matematikatanulási nehézségek mutatkoznak, amelyek leküzdése tartós segítséget, egyéni bánásmódot, differenciált oktatásszervezést és korrekciós fejlesztő eljárásokat igényel. Jellemzőjük a matematikai fogalmak, műveletek, technikák elsajátításában és alkalmazásában kifejezésre jutó tanulási gátoltság (akadályozottság). Ennek lehet biológiai, pszichológiai és szociális oka. A diszkalkulia prognosztizálható, diagnosztizálható és adekvát nevelési környezetben megelőzhető, leküzdhető. A diszkalkulia nem egy részfunkciózavar, nem egy részképességszavar, hanem a funkcionális agyi rendszerek kölcsönhatásának, integrációjának zavara. A szenzoros és motoros integrációzavarok mellett gondolkodási és nyelvi integrációs zavarokról is lehet beszélni.” [5]

### (b) A diszkalkulia okai:

- Részképességszavar: háttérben semmilyen agyi elváltozás, működészavar nem mutatható ki.
- Agyi károsodás: fejlődési rendellenesség, sérülés stb.
- Betegség: idegrendszeri, általános szervezeti megbetegedés.
- Öröklött állapotok: speciális számolási képesség diszfunkció, kromoszóma-rendellenességhez társuló diszkalkulia.
- Kedvezőtlen pszichológiai tényezők: érzelmi elhanyagoltság, értelmi elmaradás (mentális retardáció), személyiségbeli és viselkedési problémák.
- Rossz szociális, műveltségi, gazdasági háttér.
- Gyermekkori fejlődési zavarok, melyekhez diszkalkulia társulhat: más tanulási zavarok (diszlexia, diszgráfia, diszortográfia), magatartászavarok, hiperaktivitás stb.

## (c) A diszkalkulia típusai:

- Grafikus diszkalkulia: a tanuló nem képes a matematikai szimbólumok el-sajátítására, alkalmazására.
- Olvasási diszkalkulia: a tanuló nem tudja a matematikai szimbólumokat megfelelően értelmezni. E típusok együtt járhatnak diszlexiával, diszgráfiával.
- Emlékezeti diszkalkulia: az emlékezeti hibák a felületes szövegészlelésből, a gondolkodási műveletek elégtelenségéből adódnak.
- Gondolkodási diszkalkulia: a tanuló analízáló, szintetizáló, összehasonlító képessége gyenge, hibásan analógizál. Elmaradott az ítéletalkotás, a következtetés, az indokolni tudás.

## (d) A diszkalkulia tünetei:

## A diszkalkuliás tanuló

- számfogalma kialakulatlan (számlálás közben számokat kihagy, felcserél; nem tudja növekvő vagy csökkenő sorrendbe rendezni a számokat; helyiérték-fogalma bizonytalan).
- műveletvégzése lassú, eszközigényes (ujjszámolás, szorobán, rajzos modell); gyakran hibázik; az inverz műveleteket nehezen végzi.
- térben, síkban nehezen tájékozódik.
- gondolkodásának hibái: nem tud analízálni, szintetizálni, absztrahálni, helyesen analógizálni; nehezen értelmezi a szöveges feladatokat; nem tudja felfogni a matematikai összefüggéseket, szabályokat.
- figyelme szétszórt; emlékezete rövidtávú; fáradékony.
- mozgás-, beszédkoordinációja fejletlen.
- akusztikus, vizuális észlelése; beszéd- és nyelvi fejlődése elmaradott.

Sajnos a diszkalkulia nemcsak alsó tagozatos jelenség, hanem előfordulása jellemző a felső tagozaton is, de még középiskolában, sőt egyetemen is találkozhatunk diszkalkuliás diákokkal.

Semmi sem bizonyítja jobban a probléma létét, mint az 1993. évi LXXIX. számú és az 1999. évi LXVIII. számú törvények, amelyek rendezik a részképességzavarban (diszlexia, diszgráfia, diszkalkulia) szenvedő tanulók jogviszonyát. Az egyik paragrafusban a következőket olvashatjuk:

„A beilleszkedési zavarral, tanulási nehézségekkel, magatartási rendellenességgel küzdő gyermek, tanuló a közösségi életbe való beilleszkedését elősegítő rehabilitációs célú foglalkoztatásra jogosult. A rehabilitációs célú foglalkoztatás a nevelési tanácsadás, az óvodai nevelés, az iskolai nevelés és oktatás keretében valósítható meg.”

Fontos, hogy a diszkalkuliát minél korábban felismerjük és a megfelelő szakemberekhez (neurológus, pszichopedagógus, logopédus, matematikatanár) forduljunk, mert minél később kezdjük el a fejlesztést, felzárkóztatást, annál nagyobb hiányszágokkal, kudarcokkal kell a tanulónak szembenézni.

### 3. A diszkalkulia pedagógiai vizsgálata

A pedagógiai vizsgálat a diszkalkulia vizsgálatának egyik része az orvosi és a pszichológiai vizsgálat mellett. Az orvosi vizsgálat célja a neurológiai eltérések és egyéb kóros elváltozások feltárása. A pszichológiai vizsgálat pedig a gyermek intelligencia-struktúráját és a különböző részképességek állapotát térképezi fel.

E vizsgálatokat a Nevelési Tanácsadóknál, a Pedagógiai Szakszolgáltató Központokban vagy a Tanulási Képességeket Vizsgáló Szakértői Bizottságokban végzik.

A pedagógiai (logopédiai) vizsgálat nagyon fontos része a tanuló matematikai tudásszintjéről történő tájékozódás, melyet véleményünk szerint a tanuló matematikatanára tud a legszakszerűbben elvégezni.

Mivel a diszkalkuliagyánús gyerekeknél más és más nehézségek, problémák jelentkezhetnek, így általános és minden tanulót vizsgáló feladatokat nem lehet összeállítani. Szakirodalomban találhatunk azonban olyan megfigyelési szempontokat és útmutatásokat, amelyek alapján jól felkészülhetünk és elvégezhetjük a vizsgálatot. Dékány Judit „Vizsgálati módszer diszkalkuliás gyermekek számára” című tanulmányában [5] közölt vizsgálati területek figyelembevételével készítettük el mi is szakdolgozóinkkal a pedagógiai vizsgálatok tervezeteit.

A matematika szinte mindegyik témakörének tanítása és tanulása megkívánja, hogy a tanuló biztos számfogalommal rendelkezzen. Ha a természetes számok halmazában nem tudunk teljes biztonsággal tájékozódni, akkor nem boldogulunk később az egész számokkal és a törtekkel (racionális számokkal). E számhalmazok a tantervi anyag minimumát teszik ki és a követelmények a minimumszintet jelentik. Legfontosabbnak tartottuk tehát az alábbi vizsgálati teendőket:

- (1) Saját testen, térben, síkban, időben való tájékozódás felmérése.
- (2) Számfogalmak megfigyelése, melynek összetevői:
  - (a) Számlálás növekvő, csökkenő sorrendben.
  - (b) Globális mennyiségfelismerés.
  - (c) Mennyiségi relációk alkotása, megnevezése.
  - (d) Számnév, számjegy egyeztetése.
  - (e) Számok írása, olvasása.
  - (f) Mennyiség-állandóság felmérése.
  - (g) Helyiérték-fogalom vizsgálata.
  - (h) Számemlékezet megfigyelése.
- (3) Műveletek és inverzeinek értelmezése, lejegyzése, szóbeli, írásbeli műveletvégzések technikája.

- (4) Egyszerű szöveges feladatok megoldása.
- (5) Matematikai összefüggések felismerése, szabályok megfogalmazása.

Több 5. és 6. osztályos tanulóval egyenként végeztük el a vizsgálatot, melyen két tanárjelölt is közreműködött. Az egyik irányította a tanuló munkáját (kérdések, utasítások, segítség, tanulókísérleti eszközök stb.), a másik előre összeállított megfigyelési szempontok alapján mindent feljegyzett. Volt akivel a természetes számokhoz kapcsolódó feladatsort, másokkal az egész számokat, törteket illetve mindegyik témát tartalmazót oldottuk meg. A feladatok összeállításánál figyelembe vettük az osztályfoknak megfelelő minimális tananyagot és a minimális követelményeket.

A következő vizsgálati részlet 5. osztályban a természetes számok halmazában megoldandó minimum feladatokat tartalmazza, melyet 5., 6. osztályos igen gyenge tanulókkal (egyenként) majdnem a tanév végén csináltunk meg.

## (2) Számfogalmak vizsgálata:

### (a) Számlálás

*Az utasításnak megfelelően a tanulónak addig kell számolnia, amíg 10-es, 100-as vagy 1000-es átlépésig nem ér.*

- Számlálj 38-tól felfelé egysével és visszafelé!
- Számlálj 120-tól tízesével csökkenő sorrendben!
- Számlálj 915-től tízesével növekvő sorrendben!
- Számlálj 252-től húszasával növekvő sorrendben!
- Számlálj 512-től százasaival növekvő sorrendben!
- Számlálj 3225-től százasaival lefelé!

#### Tipikus hibák:

- Tízesével, húszasával, százasaival való számlálásnál a helyi és alaki értékek megváltozása minden esetben problémát okozott:  
120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200, 201, 202, 203 stb.
- számokat kihagytak;
- irányt tévesztettek;
- egyenletlen ritmusban, lassan számoltak.

### (c) Mennyiségi relációk alkotása számokkal

*A gyerek diktálás után írja a számokat egymás mellé, melyek közé kell majd kitennie a megfelelő relációjeleket. A következő számcsoporttal akkor folytatjuk, ha az előzőt befejezte a tanuló.*

Írd le a számokat egymás mellé, majd írd közéjük a megfelelő relációjeleket!

|        |      |      |      |      |  |
|--------|------|------|------|------|--|
| — 72   | 36   | 100  | 27   |      |  |
| — 421  | 612  | 621  | 803  | 521  |  |
| — 3535 | 6034 | 7034 | 1008 | 4324 |  |

**Tipikus hibák:**

- Rosszul írták le a számokat: 6034 helyett 634;
- a relációs jelet helytelenül alkalmazták;
- bizonytalanok voltak az azonos számjegyekből álló számok közötti relációk megállapításánál:  $612 \geq 621$  vagy  $612 = 621$ .

#### (g) Helyiérték-fogalom vizsgálata

*A tanár által felmutatott számkártyákról kell a tanulónak a számokat kiolvasni, majd megnevezni a számjegyek helyiértékeit. Ha ez nehezen megy, akkor egy helyiérték-táblázatot adhatunk segítségül, amelybe a számot beírva tud válaszolni.*

**Olvasd ki a számot! Hány egyes, hány tízes, hány száz, hány ezres van ebben a számban?**

- a) 162                      b) 804                      c) 1020

**Tipikus hiba:**

- A feladatot helyiérték-táblázat segítségével tudták csak megoldani.

#### (h) Számemlékezet megfigyelése

*A tanár mindig eggyel több elemből álló számhalmazt mond a gyerekeknek, melyet vissza kell mondania. Hibás visszaemlékezés esetén a feladatot nem kell folytatni.*

|     |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|
| — 9 | 4 |   |   |   |   |
| — 2 | 8 | 6 |   |   |   |
| — 2 | 9 | 6 | 4 |   |   |
| — 6 | 4 | 8 | 5 | 3 |   |
| — 5 | 7 | 3 | 9 | 1 | 6 |

**Tipikus hiba:**

- Öt elemből álló számhalmaz esetén már nem tudták felidézni a számokat: inkább több számot mondtak, mint kevesebbet.

### (3) Az alapműveletek elvégzésének vizsgálata:

#### Szóbeli összeadás

*A műveleteket a tanár szóban közli, melyeket a tanulónak hangos számolóssal fejben kell megoldani. Mindegyik feladat egy-egy kártyára is fel van írva, ha szükséges segítségként meg lehet mutatni.*

|              |                 |               |
|--------------|-----------------|---------------|
| $3 + 4 =$    | $7 + 8 =$       | $13 + 7 =$    |
| $20 + 30 =$  | $76 + 25 =$     | $62 + 26 =$   |
| $76 + 30 =$  | $325 + 48 =$    | $624 + 231 =$ |
| $74 + 334 =$ | $1024 + 5432 =$ |               |

#### Tipikus hibák:

- Nem tudták megjegyezni az összeadandókat;
- rossz volt a számolási technikájuk: úgy számoltak, mintha írásban számolnának.

#### Írásbeli összeadás

*A tanár számpárokat diktál, melyeket írásban kell összeadni.*

5074,      334;                      1024,      612;

#### Tipikus hibák:

- A számokat nem tudták helyiérték-helyesen egymás alá írni;
- rossz volt a számolási technikájuk;
- a maradékokat vagy nem tartották meg, vagy beírták az összegbe: 5074 és 334 összeadásánál az egyik gyerek „ $7 + 3 = 10$ , leírom a nullát, maradt az egy;  $0 + 1 = 1$ , leírom az egyet, maradt a nulla” szöveget mondta.

#### Szóbeli kivonás

*A szóbeli összeadáshoz hasonlóak az utasítások és a segítség.*

|               |                |                 |
|---------------|----------------|-----------------|
| $8 - 5 =$     | $20 - 8 =$     | $42 - 21 =$     |
| $80 - 50 =$   | $57 - 30 =$    | $680 - 45 =$    |
| $725 - 619 =$ | $2145 - 102 =$ | $5672 - 3031 =$ |

#### Tipikus hibák:

- Nem tudták megjegyezni a számokat: a műveletkártyák láttán úgy számoltak, mintha írásban számolnának;
- a matematika nyelvén nehezen fogalmaztak.

### Írásbeli kivonás

*A kisebbítendőt is és a kivonandót is diktálás után kell leírni, majd a kivonást írásban kell elvégezni.*

$$305, \quad 127; \quad 1725, \quad 637;$$

#### Tipikus hibák:

- A helyiértékek egyeztetése rossz volt;
- a pótlást rosszul végezték, a maradékot a magasabb helyiértékhez legtöbbször nem adták hozzá.

### Szóbeli szorzás

*A szorzótábla ismeretének vizsgálatára irányulnak a feladatok.*

$$3 * 9 = \quad 8 * 7 = \quad 6 * 6 = \quad \text{stb.}$$

#### Tipikus hiba:

- A szorzótábla bevésése nem történt meg.

### Írásbeli szorzás

*A tanár lediktálja a tényezőket és a szorzást a tanulónak írásban, hangosan mondva kell elvégezni.*

$$2046 \quad 3 ; \quad 241 \quad 35 ;$$

#### Tipikus hibák:

- A maradékokat nem tartották meg, nem vették figyelembe;
- nem történt meg a részletszorzatoknál a helyiérték-egyeztetés.

### Szóbeli osztás

*A bennfoglaló tábla (osztó tábla) ismeretének vizsgálatára irányulnak a kérdések.*

$$56 : 8 = \quad 72 : 9 = \quad 35 : 7 = \quad \text{stb.}$$

#### Tipikus hiba:

- A bennfoglaló táblát nem tudták teljes biztonsággal.

### Írásbeli osztás

*A tanuló írásban, hangosan mondva végezze el a tanár által lediktált műveleteket.*

$$342 : 9 = \quad 5436 : 25 = \quad \text{stb.}$$

#### Tipikus hibák:

- Hibásan számoltak;



- rossz volt a műveletvégzés technikája;
- a részhányadosokat rosszul állapították meg.

#### 4. A felső tagozatos tanulók tipikus matematikai hibái

A matematika szakos főiskolai hallgatók képzésük során többnyire Dr. Mosonyi Kálmán Gondolkodási hibák az általános iskolai matematikaórákon című munkája alapján ismerhették meg a tanulók matematikai gondolkodásának hibáit. A matematikai hibák megfigyelése, elemzése, előrelátása segítheti a matematikatanárt a prevencióban, a terápiában és a promócióban is. Mivel a matematikai hibák struktúrája igen szerteágazó és eltérő, napjainkban a szakirodalomban többféle csoportosításával találkozhatunk. Ezek a hibacsoportok szinte minden előforduló hibát lefednek. A teljesség igénye nélkül bemutatunk néhányat.

Bleidick (1966) az ún. Frankfurti Számolási Teszttel [5] több ezer általános és kisegítő iskolás elemi számolási fejlettségét vizsgálta. Megállapította, hogy a hibafajták 47 százaléka egyaránt előfordul az általános és a kisegítő iskolában is. A hibákat három csoportba osztotta:

- (a) Tipikus általános iskolai hibák, melyek a tanulók többségénél gyorsan megszüntethetők:
  - Ha egy nagyobb számkörre, bővebb számhalmazra térünk át, a tanulók gyakran hibáznak.
  - Az inverz műveleteket (kivonás, osztás) nehezen értelmezik, és lassabban végzik el.
  - A helyiértékek értelmezése (tizedestörtek), egyszerre több helyiértékkel való számolás nehézkes.
  - Mértékátváltások, mértékegységeknél a tizedesvessző használata gyakori hibaforrás.
  - A nulla funkciószerepét rosszul értelmezik és alkalmazzák.
- (b) Tipikus kisegítő iskolai hibák:
  - Hibás tájékozódás a helyiértékrendszerben.
  - A műveletek komponenseinek helytelen használata.
  - A szorzótábla hibái, lassú felidézése.
  - Általános bizonytalanság a mértékek jelölésében és átváltásában.
  - Nehéz az egyik műveletről a másikra való átállás.
  - Problémás a szabályok megértése.
- (c) Diszkalkuliára jellemző (ún. individuális) hibák:
  - A gondolkodás általános gyengesége nehezzé teszi a matematikát.

- Hirtelen leblokkolás, újszerű feladatoknál rövidzárlat.
- Írásbeli feladatoknál rendetlen, pontatlan írás, számok felcserélése, irányváltoztatása.
- Jellemző a transzfergyengeség, figyelmetlenség, fáradékonyság.
- Általában külső segítségre van szükség a feladatok megoldásához.

Az utóbbi két hibacsoportba tartozó tanulók esetében külön fejlesztő foglalkozásokra (programokra) van szükség, melyek egyrészt a hiba megelőzését teszik lehetővé, másrészt biztosítják az osztályfoknak megfelelő szintre a felzárkóztatást is.

Javíthatóság szempontjából a hibák lehetnek:

- (a) Előzetes hiányokból származó, tartós pedagógiai segítségnyújtással eredményesen enyhíthetőek;
- (b) matematikai beállítódás miattiak;
- (c) olvasási nehézségekből adódóak;
- (d) túlterhelésből származóak.

E hibák jellemzőiről Mesterházi Zsuzsa A matematikai feladatok megoldásának hibái című tanulmányában [5] részletesebben olvashatunk.

Összefoglalva: Ha a matematikatanárban felmerül a diszkalkulia gyanúja valamely tanítványával kapcsolatban, javasolja a diszkalkulia vizsgálatot, majd a gyerek állapotának megfelelően diszkalkulia-terápiában kell a tanulót részesíteni. Ahhoz, hogy ezt minél több 10–16 éves korosztályt tanító iskolában el lehessen végezni, a matematika szakos tanárjelölteket (gyakorló tanárokat) fel kell készítenünk. Olyan ismeretek, módszerek közvetítésére van szükség, amely képessé teszi őket egy-egy pedagógiai vizsgálathoz szükséges feladatlap elkészítésére, a vizsgálat elvégzésére, olyan fejlesztő programok kidolgozására, foglalkozások megtartására, amelyek lehetővé teszik a diszkalkuliás tanulók terápiáját.

## Irodalom

- [1] BÓDÖR J.: Korrekciós nevelés. Tankönyvkiadó, Budapest, 1991.
- [2] CZEGLÉDY I.—OROSZ GY-NÉ.—SZALONTAI T.—SZILÁK A-NÉ.: Matematika tantárgypedagógia I. (főiskolai jegyzet) Calibra Kiadó, Budapest, 1994.
- [3] DÉKÁNY J.: Kézikönyv a diszkalkulia felismeréséhez és terápiájához. BGGYTF, Budapest, 1995.
- [4] GRISSEMANN, H.—WEBER, A.: Speciális számolási zavarok, okok és terápia. Hans Huber Kiadó, Bern, 1982.
- [5] MESTERHÁZI ZS.: Diszkalkuliáról pedagógusoknak. BGGYTF, Budapest, 1996.
- [6] GYARMATI É.: Tanulási zavarok azonosítása és kezelése az óvodában és az iskolában. *Új Pedagógiai Szemle* (Internet), 1999. november.

- [7] JUHÁSZ ZS.—NYÍRŐ K.: A matematikai tanulási zavarok: diszkalkulia. Szakdolgozat, EKF, 2000.
- [8] MÁRKUS A.: Számolási zavarok a neuropszichológia szemszögéből, *Fejlesztő Pedagógia, Különszám*, 1999.
- [9] SELIKOWITZ, M.: Diszlexia és egyéb tanulási nehézségek. Medicina Könyvkiadó Rt., Budapest, 1996.

**Szilák Aladárné**

Institute of Mathematics and Informatics

Eszterházy Károly College

Leányka str. 4–6.

H-3300 Eger, Hungary

